



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Die Vielfalt der Integrationsmethoden im Reellen

Jan Weeber

NOTE: _____

PUNKTZAHL: _____

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

20. März 2023

Inhaltsverzeichnis

I	Einleitung	2
1	Problem/Fragestellung	2
2	Grundvorstellung vom Integral	2
2.1	Was ist ein Riemann-Integral?	2
2.1.1	Was ist Riemann-integrierbar und was nicht?	3
II	Hauptteil	3
3	Partielle Integration	4
3.1	Anwenden der Produktregel	4
3.2	Definition	4
3.3	Beispiel	5
4	Integration durch Substitution	6
4.1	Anwendung der Kettenregel	6
4.2	Durchführung einer Substitution	6
5	Partialbruchzerlegung	8
5.1	Linearfaktorzerlegung	8
5.2	Gleichungssystem durch Koeffizientenvergleich	9
6	Numerische Integration	9
6.1	Sehnentrapezverfahren	10
6.2	Flächeninhalt eines Trapezes	10
6.3	Formel des Sehnentrapezverfahrens	10
6.3.1	Anwendung auf ein Beispiel	11
6.3.2	Abschätzen der Genauigkeit	11
6.4	Simpsonverfahren	12
6.5	Bestimmung des Parabelbogens durch Gleichungssystem	12
6.6	Herleitung der allgemeinen Formel	13
6.6.1	Überprüfen der Genauigkeit	14
6.7	Fehlerabschätzung	15
III	Fazit	16
IV	Anhang	18

Teil I

Einleitung

1 Problem/Fragestellung

Im Schulunterricht werden bereits die Grundregeln und Methoden für die Bildung von Stammfunktionen und das Berechnen von Integralen gelehrt. Mit den Grundregeln können auch schon einige Funktionen integriert werden, jedoch sind diese sehr begrenzt und es kann schnell eine Funktion gefunden werden, die nicht mit den Grundregeln (Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Differenzregel) integriert werden kann.

Somit ist das Ziel dieser Facharbeit, weitere Integrationsmethoden zu erarbeiten und zu lernen wann welche Methode passend verwendet werden kann.

2 Grundvorstellung vom Integral

Das Integral bietet die Möglichkeit, die Fläche zwischen Graph und x-Achse in einem bestimmten Intervall $[a, b]$ zu bestimmen. Dazu kann das Intervall in kleinere Teilintervalle unterteilt werden und mit Rechtecken oder Trapezen approximiert werden. Je kleiner die Breite der Teilintervalle, also je höher die Anzahl an Teilintervallen, desto genauer kann der Wert des Integrals bestimmt werden.

Der Begriff des Integrals ist jedoch nicht einfach nur auf die Fläche zwischen Graph und x-Achse beschränkt, da ein Graph auch unterhalb der x-Achse verlaufen kann und die Fläche somit negativ wäre.

Stellt man sich einen Graphen vor, der die Veränderung eines Kontostandes in einer bestimmten Zeit in wellenförmigen Bewegungen angibt, so würde der Graph auch im Negativen verlaufen (z.B. bei einer Auszahlung). Berechnet man von diesem Graphen ein Integral, so erhält man nicht nur einen Betrag einer Fläche, sondern man hätte die Bilanz über den bestimmten Zeitraum berechnet, d.h. das Integral gibt in diesem Fall die Bestandsänderung des Kontostands an. Flächen oberhalb der x-Achse gehen dabei positiv in die Bilanz ein, Flächen unterhalb negativ.

2.1 Was ist ein Riemann-Integral?

Das Riemann-Integral ist nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann benannt, der von 1826-1866 lebte. Das Konzept liegt darin, einen gesuchten Flächeninhalt durch Aufteilung in kleinere Abschnitte und durch Verwendung von Rechtecken sich dem Flächeninhalt anzunähern. Das Intervall wird

also zerlegt und kann dann mithilfe von Riemann-Summen oder von Ober- und Untersummen approximiert werden.

2.1.1 Was ist Riemann-integrierbar und was nicht?

Eine Funktion $f(x)$ ist auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar, wenn die oberen und unteren Riemann-Summen von $f(x)$ auf diesem Intervall existieren und übereinstimmen, d.h.

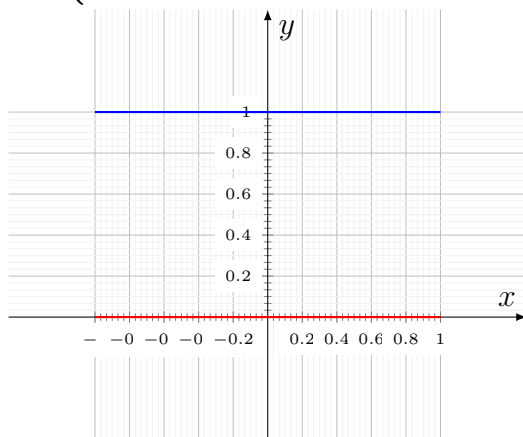
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

wobei $\overline{\int_a^b}$ und $\underline{\int_a^b}$ die oberen und unteren Riemann-Integrale sind.[1]

Wenn also der kleinste Betrag der Obersumme mit dem größten der Untersumme übereinstimmt, ist eine Funktion Riemann-integrierbar.

Ein Beispiel für eine Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist, ist die Dirichlet-Funktion: [2]

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{wenn } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Auch wenn es so scheint, ist die Funktion nicht stetig, die Funktionswerte „springen“ entweder auf 0 oder 1, da die Funktion den Wert 1 annimmt, wenn x eine rationale Zahl, und 0, wenn x eine irrationale Zahl ist. Diese Funktion ist also weder stetig noch differenzierbar, da auch an keiner Stelle eine Ableitung vorhanden ist. Dass die Funktion unstetig und nicht differenzierbar ist, sind jedoch noch keine hinreichenden Bedingungen, um die Riemann-Integrierbarkeit zu widerlegen. Der Grund, weshalb diese Funktion nicht Riemann-integrierbar ist, liegt darin, dass die Riemann-Summen nicht gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergieren, da die Funktion auf jedem Intervall sowohl den Wert 1, als auch den Wert 0 annehmen kann.

Teil II

Hauptteil

Im Folgenden werden Integrationsmethoden vorgestellt, die dazu dienen, Integrale berechnen zu können, die mit der Potenzregel, Faktorregel, Summenregel und Differenzregel nicht zu berechnen sind.

Dafür werden partielle Integration, Integration durch Substitution, Integration durch Partialbruchzerlegung und anschließend zwei numerische Verfahren erläutert.

3 Partielle Integration

Die partielle Integration ist eine Methode, die verwendet wird, um das Integral eines Produkts zweier Funktionen zu bestimmen. Sie basiert auf der Produktregel der Ableitung.

3.1 Anwenden der Produktregel

Es gilt die Produktregel für das Ableiten von Funktionen, die miteinander multipliziert werden:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Integriert man die allgemeine Gleichung der Produktregel, so erhält man

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Integral und Ableitung heben sich auf, deshalb gilt:

$$\int_a^b (u(x) \cdot v(x))' dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b$$

Durch Umstellen ergibt sich zuletzt folgendes:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

3.2 Definition

Definition partielle Integration: „Sind u und v Funktionen, die auf einem Intervall $[a; b]$ differenzierbar sind, und sind v' und u' stetig auf $[a; b]$, dann

gilt:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx \quad [3]$$

Dabei ist zu beachten, dass innerhalb einer Rechnung die partielle Integration auch teilweise mehrfach angewandt werden muss, um ein Ergebnis zu erhalten, dies ist jedoch nicht immer der Fall.

3.3 Beispiel

Anwendung der Regel auf ein Beispiel:

Gesucht ist $\int e^x \cdot \cos(x) dx$.

Wir setzen $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = e^x$,
somit ist $u'(x) = -\sin(x)$ und $v(x) = e^x$

$u(x); u'(x); v(x); v'(x)$ in die rot markierte Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) - \int -e^x \cdot \sin(x) dx && \text{---Regel erneut anwenden} \\ &= e^x \cdot \cos(x) - (-e^x \cdot \sin(x) - \int -e^x \cdot \cos(x) dx) \\ &= e^x \cdot \cos(x) - (-e^x \cdot \sin(x) + \int e^x \cdot \cos(x) dx) \\ &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) dx && + \int e^x \cdot \cos(x) dx \\ 2 \int e^x \cdot \cos(x) dx &= e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x) && :2 \\ \int e^x \cdot \cos(x) dx &= \frac{e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x)}{2} \end{aligned}$$

Somit wurde $\int e^x \cdot \cos(x) dx$ bestimmt. Falls ein bestimmtes Integral gesucht ist, sind nur noch die Intervallgrenzen $[a; b]$ einzusetzen.

$$\int_a^b e^x \cdot \cos(x) dx = \left[\frac{e^x \cdot \cos(x) + e^x \cdot \sin(x)}{2} \right]_a^b$$

Bei der partiellen Integration handelt es sich also um eine Methode, das Produkt aus zwei Funktionen zu integrieren. Sie wird meistens dann verwendet, wenn eine der Funktionen leicht abzuleiten und die andere leicht zu integrieren ist. Man bestimmt dann u und u' , sowie v' und v , und setzt sie in die Formel ein.

4 Integration durch Substitution

Integration durch Substitution ist eine Methode zur Integration, die es ermöglicht, bestimmte Integrale durch Umformung in leichter zu integrierende Formen zu überführen. Die Idee dahinter ist, die Integrationsvariable durch eine neue Variable zu ersetzen, sodass man das Integral in eine Form bringt, die durch die Anwendung bekannter Integrationsregeln gelöst werden kann.

4.1 Anwendung der Kettenregel

Nach der Kettenregel gilt folgendes für ein Integral:

$$\int_a^b f(ux + v) dx = \left[\frac{1}{u} \cdot F(ux + v) \right]_a^b = \frac{1}{u} \cdot F(ub + v) - \frac{1}{u} \cdot F(ua + v)$$

multiplizieren mit u :

$$\int_a^b (u \cdot f(ux + v)) dx = F(ub + v) - F(ua + v) = [F(ux + v)]_a^b$$

zur Vereinfachung schreiben wir $ux + v = g(x)$, somit ist $g'(x) = u$.

eingesetzt in die Gleichung:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = [F(g(x))]_a^b \quad [3]$$

Ein Beispiel, bei dem die Funktion bereits in dieser Form steht:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

Hier ist zu erkennen, dass $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 1 + x^2$ mit der Ableitung $g'(x) = 2x$ ist. In diesem Fall muss also die Stammfunktion von $f(x)$ gebildet werden und $g(x)$ darin eingesetzt werden.

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}; \text{ somit ist } \int_0^2 2x\sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} \right]$$

Jedoch ist die rot markierte Gleichung nicht zielführend, wenn die zu integrierende Funktion nicht in dieser Form steht.

Man kann ein Integral jedoch trotzdem berechnen, indem man einen Term durch Substitution (lat. „substituere“= ersetzen) vereinfacht und die Zusammenhänge berücksichtigt und anpasst.

4.2 Durchführung einer Substitution

Das Vorgehen wird beispielhaft an dem Integral $\int_{-2}^0 \sqrt{1-2x} dx$ gezeigt und erklärt.

Es soll das Integral $\int_{-2}^0 \sqrt{1-2x} dx$ berechnet werden.

Das Problem an dieser Funktion liegt in dem Term unter der Wurzel, also vereinfacht man diesen, indem man $z = 1 - 2x$ setzt:

$$\int_{-2}^0 \sqrt{z} \, dx$$

Dies lässt sich jedoch nicht berechnen, da x immer noch die Integrationsvariable ist. Ein Zusammenhang kann mithilfe des Differenzialquotienten [3] hergestellt werden, denn es gilt in dem Fall

$$\frac{dz}{dx} = z' = -2$$

Gleichung nach dx umstellen [4]:

$$dx = \frac{dz}{-2} = \frac{1}{-2} dz$$

Somit wurde die Integrationsvariable angepasst

$$\int_{?}^{?} \sqrt{z} \cdot \left(\frac{1}{-2} \right) dz$$

Die Werte der Grenzen des Intervalls sind allerdings nicht mehr abhängig von x , sondern von z , also müssen diese ebenfalls angepasst werden. Dafür wird in der Gleichung $z = 1 - 2x$ das x mit den Grenzen ersetzt [4] (untere Grenze -2 , obere 0):

untere Grenze: $1 - 2 \cdot (-2) = 5$, obere Grenze: $1 - 2 \cdot 0 = 1$

Nun haben wir das Integral

$$\int_5^1 -\frac{1}{2} \sqrt{z} \, dz$$

Das Integral kann wie gewohnt berechnet werden:

$$\int_5^1 -\frac{1}{2} \sqrt{z} \, dz = \left[\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \cdot z^{\frac{3}{2}} \right]_5^1 = \left[-\frac{1}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} \right]_5^1 = \left(-\frac{1}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} \right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{3} - \frac{1}{3} \approx 3,393$$

Falls nur die Stammfunktion gesucht war, kann auch eine Rücksubstitution [4] vorgenommen werden, um die Stammfunktion mit der ursprünglichen Variable x zu erhalten. Dafür müssen wir also wieder z mit $1 - 2x$ ersetzen, die Stammfunktion wäre dann:

$$\left[-\frac{1}{3} (1 - 2x)^{\frac{3}{2}} \right]_a^b$$

Dies ist das Vorgehen bei der Integration durch Substitution.

5 Partialbruchzerlegung

Mithilfe von Partialbruchzerlegung können Brüche, die aus Polynomen bestehen, leichter integriert werden. Ein aus mehreren Termen bestehender Bruch kann bekanntlich in kleinere Brüche aufgeteilt werden, die dann als Summe dargestellt werden. Im Nenner der Brüche stehen dann die verschiedenen Linearfaktoren aus dem ursprünglichen Bruch.

Um eine Partialbruchzerlegung durchzuführen, müssen zuerst die Nullstellen des Nenners des zu integrierenden Bruchs berechnet werden, um die Linearfaktoren zu ermitteln. Zur Demonstration wird folgendes Beispiel berechnet:

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} dx$$

5.1 Linearfaktorzerlegung

Linearfaktorzerlegung durch Bestimmen der Nullstellen des Nenners:

$$\begin{aligned}x^2 + x - 2 &= 0 \\x &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\x &= 1 \vee x = -2\end{aligned}$$

Somit gilt dann für den Bruch:

$$\frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 2)}$$

Der Bruch wird dann zerlegt; „Im Allgemeinen verursacht jeder einzelne Linearfaktor $x - c$ einen Term $\frac{A}{x-c}$.“ [5]

$$\frac{3x + 1}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 2)}$$

multiplizieren mit $(x - 1)(x + 2)$, um die Brüche aufzulösen:

$$\begin{aligned}3x + 1 &= A(x + 2) + B(x - 1) \\&= Ax + Bx + 2A - B = x(A + B) + (2A - B)\end{aligned}$$

5.2 Gleichungssystem durch Koeffizientenvergleich

Nun kann mithilfe eines Koeffizientenvergleichs bei der Gleichung $3x + 1 = (A + B)x + (2A - B)$ ein Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$A + B = 3 \quad (1)$$

$$2A - B = 1 \quad (2)$$

(Lösung: $A = \frac{4}{3}$ und $B = \frac{5}{4}$)

Nachdem die Werte eingesetzt wurden, erhalten wir dann die vereinfachten Brüche

$$\frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x + 2}$$

und somit

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + x - 2} dx = \frac{4}{3} \cdot \ln |x - 1| + \frac{5}{4} \cdot \ln |x + 2| + C$$

Dies ist das Vorgehen bei einer Partialbruchzerlegung und kann auf viele weitere Brüche angewandt werden, jedoch hat auch diese Methode ihre Grenzen und es kann schnell ein Beispiel gefunden werden, das nicht mit dieser Methode integrierbar ist.

6 Numerische Integration

Durch numerische Integration können bestimmte Integrale einer Funktion mittels numerischer Methoden approximiert werden. Die Grundidee besteht darin, die Fläche zwischen einem Graphen und der x-Achse mithilfe einer endlichen Anzahl geometrischer Formen, wie Rechtecken oder Trapezen, näherungsweise zu bestimmen. Dabei wird die Approximation des Integrals genauer, wenn die Teilintervalle kleiner sind.

Diese Art der Integration ist besonders nützlich in Fällen, in denen die zu integrierende Funktion zu kompliziert, oder mit den behandelten Methoden nicht integrierbar ist.

Ein Beispiel für ein Integral, welches sich selbst mit partieller Integration, Integration durch Substitution und durch Partialbruchzerlegung nicht bestimmen lässt, ist Folgendes:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} dx$$

6.1 Sehnentrapezverfahren

6.2 Flächeninhalt eines Trapezes

Zunächst ist f eine stetige und nicht-negative Funktion, sodass das Integral von f innerhalb des Intervalls $[a; b]$ dem Flächeninhalt unter dem Graphen entspricht. Es wird die Teilung des Intervalls $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ betrachtet, bei dem alle Teilintervalle $[x_i; x_{i+1}]$ die gleiche Länge, $\frac{b-a}{n}$ haben. [3]

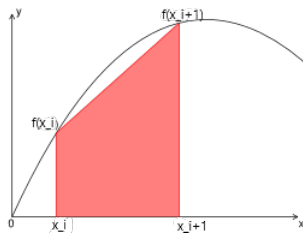


Abbildung 1: Sehnentrapez [6]

Anhand der Abbildung 1 ist zu erkennen, wie der Flächeninhalt des Teilintervalls $[x_i; x_{i+1}]$ mithilfe eines Trapezes näherungsweise dargestellt werden kann. Die „Sehne“ ist hierbei die Strecke zwischen den Punkten $[x_i; f(x_i)]$ und $[x_{i+1}; f(x_{i+1})]$.

Für den Flächeninhalt A eines Trapezes mit der Höhe h und den parallelen Seiten a und c gilt $A = \frac{1}{2}h \cdot (a + c)$. Als Flächeninhalt A_i des Trapezes über dem Intervall $[x_i; x_{i+1}]$ ergibt sich also: [3]

$$A_i = \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Dies ist die Formel, um den Flächeninhalt eines Teilintervalls zu berechnen. Um jedoch den Näherungswert für den Flächeninhalt über dem Intervall $[a; b]$ zu bestimmen, müssen alle Trapezflächeninhalte A_i über allen Teilintervallen addiert werden:

$$A \approx A_0 + A_1 + \dots + A_{n-1} \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot [(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))]$$

6.3 Formel des Sehnentrapezverfahrens

Bei der zuletzt genannten Gleichung kommen die Funktionswerte $f(x_0) = f(a)$ und $f(x_n) = f(b)$, also die äußeren Grenzen des Intervalls, nur einmal vor, während alle anderen je zweimal vorkommen, sodass man vereinfachen kann:

$$A \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot [f(x_0) + 2 \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

Mit dieser Formel wird nun für jedes Teilintervall ein Trapez gebildet und die Flächeninhalte dieser Trapeze werden berechnet und addiert, sodass der gesuchte Flächeninhalt näherungsweise bestimmt wird.

6.3.1 Anwendung auf ein Beispiel

Zur Veranschaulichung berechnen wir das Integral der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ im Intervall $[0; 1]$ und wählen $n = 6$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 + x^2 dx &\approx \frac{1}{12} \cdot \left(f\left(\frac{1}{6}\right) + 2 \cdot \left(f\left(\frac{2}{6}\right) + f\left(\frac{3}{6}\right) + f\left(\frac{4}{6}\right) + f\left(\frac{5}{6}\right) \right) + f\left(\frac{6}{6}\right) \right) \\ &= 0,5922\end{aligned}$$

Der genaue Wert dieses Integrals liegt bei $\frac{7}{12}$ oder auf vier Nachkommastellen gerundet bei 0,5833, der mit der Trapezformel berechnete Wert ist also um 0,0089 oder 1,5% zu groß.

6.3.2 Abschätzen der Genauigkeit

Das Ziel numerischer Integrationen ist es, das gesuchte Integral so genau wie möglich zu bestimmen und einen möglichst genauen Wert zu berechnen.

Dazu kann allgemein gesagt werden: Je kleiner die Längen der Teilintervalle und je mehr Teilintervalle vorhanden sind, desto näher liegt der berechnete Wert an dem wahren Wert des Integrals. Dies liegt daran, dass sobald die Teilintervalle länger bzw. von der Anzahl weniger werden, die Sehnen der Trapeze auch länger werden. Da diese Geraden sind, und das Ziel der Methode ist, einen kurvenförmigen Graphen mit einer Geraden anzunähern, wird das Ergebnis ungenauer, wenn die Geraden länger werden.

Denn viele kleine Sehnen können sich dem Verlauf einer Kurve besser annähern, als einige lange Sehnen. Somit wird das Ergebnis durch mehr Teilintervalle genauer.

Würde das Teilintervall aus Abbildung 1 noch einmal halbiert werden, so würde man zwei Sehnen und somit auch Trapeze erhalten. Die Fläche zwischen Graph und rotem Trapez würde verringert werden, die Näherung wäre somit genauer.

Zu beachten bei der Abschätzung der Genauigkeit ist zusätzlich noch die Krümmung des Graphen: Ist der Graph rechtsgekrümmt (zu sehen in Abbildung 1), so liegt das Ergebnis der Näherung unter dem wahren Wert des Integrals,

ist der Graph linksgekrümmt, so ist die Näherung zu groß.

Dieser Zusammenhang ist mit der Lage der Sehnen der Trapeze zu erklären (Graph oberhalb der x-Achse):

Die Sehnen, die sich aus einer Geraden zwischen zwei Punkten auf einem Graphen zusammensetzen, liegen bei einem rechtsgekrümmten Graphen ausschließlich unterhalb des Funktionsgraphen, bei einem linksgekrümmten Graphen liegen die Sehnen ausschließlich oberhalb des Graphen. Wenn die

Sehne des Trapezes unterhalb des Graphen liegt, bleibt die Fläche zwischen Graph und Sehne in der Rechnung unbeachtet, obwohl sie zum Integral des Graphen gehört. Liegt die Sehne des Trapezes oberhalb des Graphen, so erhält man einen Flächenüberschuss, da die Fläche zwischen Sehne und Graph mitberechnet wird, obwohl sie nicht zum Integral gehört. Sobald der Graph jedoch unterhalb der x-Achse verläuft, gilt genau das umgekehrte, der mit der Trapezformel berechnete Betrag des Integrals ist bei einem rechtsgekrümmten Graphen höher, bei einem linksgekrümmten niedriger als der wahre Betrag des Integrals.

6.4 Simpsonverfahren

Das Simpsonverfahren (auch Simpsonregel genannt) ist eine weitere Methode der numerischen Integration. Genau wie beim Sehnentrapezverfahren wird hier das Integral approximiert, jedoch mit dem Unterschied, dass Punkte des Graphen einer Funktion nicht durch Strecken, sondern z.B. durch Parabelbögen, die sich dem Graphen besser anpassen können, verbunden werden. Somit soll für eine größere Genauigkeit gesorgt werden.

6.5 Bestimmung des Parabelbogens durch Gleichungssystem

Es wird wieder davon ausgegangen, dass f eine nicht-negative Funktion über dem Intervall $[a; b]$ ist.

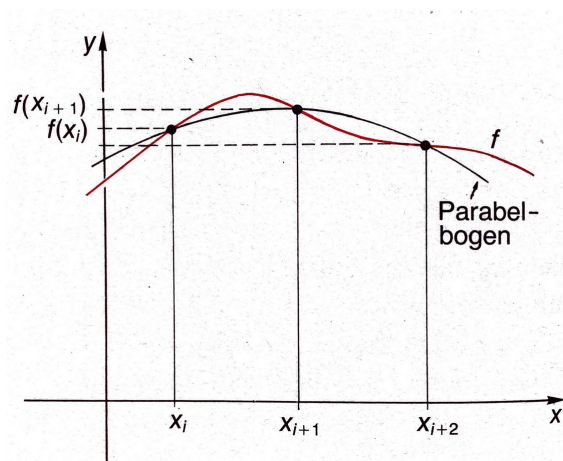


Abbildung 2: Parabelbogen [3]

Das Intervall $[a; b]$ wurde in zwei Teilintervalle $[x_i; x_{i+1}]$ und $[x_{i+1}; x_{i+2}]$ aufgeteilt. Nun soll die Fläche unter dem Graphen f durch einen Parabelbogen, also eine quadratische Funktion, angenähert werden.

Die gesuchten Koeffizienten der Funktion des Parabelbogens $(ax^2 + bx + c)$ können mithilfe eines Gleichungssystems bestimmt werden, da $g(x_i) = f(x_i)$, $g(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ und $g(x_{i+2}) = f(x_{i+2})$ gilt. [3]

$$f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c \quad (1)$$

$$f(x_{i+1}) = ax_{i+1}^2 + bx_{i+1} + c \quad (2)$$

$$f(x_{i+2}) = ax_{i+2}^2 + bx_{i+2} + c \quad (3)$$

Mit diesem Gleichungssystem lassen sich die Koeffizienten und somit auch die gesuchte Funktion des Parabelbogens bestimmen. Von dieser Funktion kann nun das Integral im Intervall $[x_i; x_{i+2}]$ berechnet werden, das Ergebnis liefert dann einen Näherungswert für das Integral der Funktion f im selben Intervall.[3]

6.6 Herleitung der allgemeinen Formel

Allerdings entsteht bei diesem Vorgehen der Funktionsbestimmung ein großer Arbeitsaufwand. Das Vorgehen kann vereinfacht werden, indem der Graph von f um $-x_{i+1}$ in x-Richtung verschoben wird, sodass dieser Punkt (die Mitte des Intervalls) auf der Stelle 0 liegt. Die Fläche sowie die y-Koordinaten ändern sich bei einer Verschiebung des Graphen in x-Richtung nicht.

$\frac{b-a}{n}$ gibt die Länge der Teilintervalle an und wird hier mit h abgekürzt,

$f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$ werden mit y_i, y_{i+1} und y_{i+2} abgekürzt.

Die Stelle x_i verschiebt sich also auf $-h$, die Stelle x_{i+2} auf h , da x_i in der Mitte der Intervalle und auf der Stelle 0 liegt.

Der Parabelbogen $g(x)$ verläuft nun also durch die Punkte $(-h; y_i)$, $(0; y_{i+1})$ und $(h; y_{i+2})$.

Mit diesen Punkten und der Gleichung $g(x) = ax^2 + bx + c$ kann wieder ein Gleichungssystem aufgestellt werden:

$$y_i = ah^2 - bh + c \quad (1)$$

$$y_{i+1} = c \quad (2)$$

$$y_{i+2} = ah^2 + bh + c \quad (3)$$

addieren der Gleichungen (1) und (3):

$$y_i + y_{i+2} = 2ah^2 + 2c$$

umstellen nach a und $c = y_{i+1}$ setzen:

$$a = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^2}$$

in (1) eingesetzt und vereinfacht ergibt:

$$b = \frac{-y_i + y_{i+2}}{2h}$$

Koeffizienten einsetzen in die Funktionsgleichung der Parabel:

$$g(x) = \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^2} \cdot x^2 + \frac{-y_i + y_{i+2}}{2h} \cdot x + y_{i+1}$$

Gesucht ist der Flächeninhalt dieser Parabel im Intervall $[x_i; x_{i+2}]$, also muss das Integral von $g(x)$ mit den Grenzen $-h$ bis h berechnet werden:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h g(x) dx &= \frac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-h}^h + \frac{-y_i + y_{i+2}}{2h} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-h}^h + y_{i+1} [x]_{-h}^h \\ &= \frac{1}{3} h \cdot (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) + 2hy_{i+1} \\ &= \frac{h}{3} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \end{aligned}$$

[3] Setzt man hier nun die Funktionswerte ein, so erhält man die Annäherung für das Integral im Teilintervall $[x_0; x_2]$. Soll als nächstes das Integral von dem ganzen Intervall $[a; b]$ bestimmt werden, so müssen alle Integrale der Teilintervalle $[x_0; x_2]$, $[x_2; x_4]$, ..., $[x_{n-2}; x_n]$ addiert werden:

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Für die Abkürzungen h und y wieder $\frac{b-a}{n}$ und $f(x)$ einsetzen und zusammenfassen: [3]

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + f(x_n))$$

Dies ist schließlich die Gleichung der Simpsonregel, um Integrale mithilfe von quadratischen Funktionen näherungsweise zu bestimmen.

6.6.1 Überprüfen der Genauigkeit

Um die Genauigkeit zu überprüfen, testen wir diese Methode an der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ über dem Intervall $[0; 1]$ mit $n = 6$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 + x^2 &= \frac{1}{18} \cdot \left(f(0) + 4 \left(f\left(\frac{1}{6}\right) \right) + 2 \left(f\left(\frac{2}{6}\right) \right) + 4 \left(f\left(\frac{3}{6}\right) \right) + 2 \left(f\left(\frac{4}{6}\right) \right) + 4 \left(f\left(\frac{5}{6}\right) \right) + f\left(\frac{6}{6}\right) \right) \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Der mit dem Simpsonverfahren berechnete Näherungswert liegt bei genau $\frac{7}{12}$.

Überprüft man dies mit einem Rechner, so stellt man fest, dass dies nicht nur eine Näherung, sondern das exakte Ergebnis des Integrals $\int_0^1 x^3 + x^2$ ist. Diese Rechnung war ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung, bei komplexen Funktionen ist das Vorgehen genau gleich.

6.7 Fehlerabschätzung

Für das Sehnentrapezverfahren: „Wenn zur näherungsweisen Bestimmung des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion f über einem Intervall $[a; b]$ das Sehnentrapezverfahren eingesetzt wird, dann gibt der Term

$$\frac{M}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}$$

eine obere Schranke für den dabei auftretenden Fehler an. Hierin ist M eine obere Schranke für den Betrag von $f''(x)$ der 2. Ableitung von f über dem Intervall $[a; b]$ und n die Anzahl der Teilintervalle“[3]

Nach dieser Definition kann nun also die maximale Abweichung berechnet werden. Diese berechnen wir nun am vorherigen Beispiel mit $f(x) = x^3 + x^2$ im Intervall $[0; 1]$ und mit $n = 6$ Teilintervallen:

$$f''(x) = 6x + 2$$

somit ist der Betrag der 2. Ableitung im Intervall $[0; 1] \leq 8$, für M kann also 8 in die Formel eingesetzt werden:

$$\frac{8}{12} \cdot \frac{(1-0)^3}{6^2} = 0,01852$$

Dies wäre nach der Formel die größtmögliche Abweichung, sie lag in dem Beispiel jedoch nur bei 0,0089.

Für das Simpsonverfahren: „Wenn zur näherungsweisen Bestimmung des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion f über einem Intervall $[a; b]$ das Simpsonverfahren eingesetzt wird, dann gibt der Term

$$\frac{M}{90} \cdot \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

eine obere Schranke für den dabei auftretenden Fehler an. Hierin ist M eine obere Schranke für den Betrag der 4. Ableitung über dem Intervall $[a; b]$ und n die Anzahl der Teilintervalle.“[3]

Diese Definition würde erklären, weshalb bei der Funktion 3. Grades bei der Anwendung des Simpsonverfahrens überhaupt kein Fehler aufgetreten ist. Denn M stellt hier die obere Schranke für den Betrag der 4. Ableitung dar,

jedoch ist die 4. Ableitung bei einer Funktion 3. Grades gleich null, somit ist der ganze Term zur Fehlerbestimmung gleich null.

Bei einer Funktion, bei der eine 4. Ableitung vorhanden ist, müsste diese bestimmt und der höchstmögliche Betrag der 4. Ableitung für das jeweilige Intervall berechnet werden.

Teil III

Fazit

In den vorherigen Teilen der Facharbeit wurden fünf Methoden, die zum Integrieren von Funktionen und Berechnen von Integralen verwendet werden können, vorgestellt. Diese sind die partielle Integration, Integration durch Substitution und durch Partialbruchzerlegung, sowie zwei numerische Methoden, das Sehnentrapez- und Simpsonverfahren.

Allgemein sind alle Verfahren sehr nützlich und in bestimmten Situationen passend anzuwenden, aber neben den Vorteilen gibt es auch individuelle Nachteile.

So wird die partielle Integration zum Integrieren von Produkten von Funktionen verwendet, kann jedoch auch sehr arbeitsaufwendig bei komplexen Funktionen sein und ist auch nicht immer erfolgreich, wenn z.B. keine Vereinfachung erreicht wird.

Die Integration durch Substitution ist ebenfalls eine wichtige Methode zum Integrieren, jedoch besteht hier teilweise die Schwierigkeit darin, eine passende Substitution zu wählen. Denn wenn die falsche Substitution gewählt wird, kann die Integration komplizierter oder sogar unmöglich sein. Bei der Partialbruchzerlegung kommt es vor allem bei Polynomen mit höherem Grad zu Problemen, da der Rechenaufwand sehr groß und die Bestimmung der Koeffizienten kompliziert werden kann. Ansonsten ist dies eine sehr nützliche Methode, um Brüche aus Polynomen stark zu vereinfachen und dadurch integrieren zu können.

Numerische Verfahren haben allgemein den Vorteil, Integrale annähern zu können, auch wenn keine Stammfunktion angegeben werden kann, wenn die Funktion beispielsweise zu komplex ist. Sie haben jedoch den Nachteil, dass das Integral ab einem bestimmten Grad der Funktion nur angenähert und nicht genau bestimmt werden kann. Außerdem gilt bei diesen Verfahren: Je genauer das Ergebnis sein soll, desto mehr Rechenaufwand ist damit verbunden. So ist das Simpsonverfahren in den meisten Fällen genauer als das Sehnentrapezverfahren, benötigt jedoch auch mehr Rechenaufwand. Je genauer das Ergebnis sein soll, desto mehr Teilintervalle und somit mehr

Rechenaufwand werden benötigt.

Zusammenfassend wissen wir nun also, dass
die partielle Integration zum Integrieren von Produkten aus Funktionen,
die Integration durch Substitution beim Integrieren von Funktionen, die aus
einer inneren und äußeren Funktion zusammengesetzt sind,
die Partialbruchzerlegung zum Vereinfachen von Brüchen aus Polynomen, um
sie integrieren zu können,
das Sehnentrapezverfahren zur Annäherung des Integrals durch Trapeze,
und schließlich das Simpsonverfahren zur Annäherung des Integrals durch
Parabeln verwendet wird.

Teil IV

Anhang

Literatur

- [1] (2023) Riemannsches integral. [Online]. Available:
https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsches_Integral
- [2] (2023) Dirichlet-funktion. [Online]. Available:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Dirichlet-Funktion>
- [3] B. Diekmann, *Mathematik: Ausgabe Hahn-Dzewas / Hahn ; Dzewas. Leistungskurs Analysis. Hauptbd. . / Hrsg. von Jutta Cukrowicz und Jürgen Dzewas. Mitarb. Benno Diekmann ...* Westermann, 1990, no. Bd.
1. [Online]. Available:
<https://books.google.de/books?id=vLd1AAAACAAJ>
- [4] *Integration durch Substitution.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009, pp. 151–160. [Online]. Available:
https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9258-4_10
- [5] S. L. Salas and E. Hille, *Calculus: Einführung in die Differential-und Integralrechnung.* Spektrum, Akad. Verlag, 1994.
- [6] (2023) Trapezregel. [Online]. Available:
<https://de.wikipedia.org/wiki/Trapezregel#/media/Datei:Sehnentrapezformel.svg>

Abbildungsverzeichnis

1	Sehnentrapez [6]	10
2	Parabelbogen [3]	12

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 20. März 2023

Vorname Nachname

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 20. März 2023

Vorname Nachname