



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

# Matrizen - ein Werkzeug zur Untersuchung stochastischer Prozesse

*Lukas Röttmann*

NOTE: \_\_\_\_\_

PUNKTZAHL: \_\_\_\_\_

---

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

19. März 2023

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                  |           |
|----------|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung</b>                                                | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Matrizen</b>                                                  | <b>1</b>  |
| 2.1      | Definition . . . . .                                             | 1         |
| 2.2      | Arten von Matrizen . . . . .                                     | 2         |
| 2.3      | Anwendungen einer Matrix . . . . .                               | 3         |
| 2.4      | Rechenarten . . . . .                                            | 4         |
| <b>3</b> | <b>Stochastische Prozesse</b>                                    | <b>6</b>  |
| 3.1      | Definition von Stochastik und stochastischen Prozessen . . . . . | 6         |
| 3.2      | Markow-Ketten . . . . .                                          | 6         |
| 3.2.1    | Berechnung von Zuständen . . . . .                               | 8         |
| 3.2.2    | Ein Beispiel zur Verdeutlichung der Vorteile . . . . .           | 9         |
| 3.2.3    | Grenzwertuntersuchungen bei Markow-Ketten . . . . .              | 10        |
| <b>4</b> | <b>Reflexion über Sinnhaftigkeit im Unterricht</b>               | <b>15</b> |
| <b>5</b> | <b>Anhang</b>                                                    | <b>16</b> |

# 1 Einführung

Vor dem Wechsel von G8 zu G9 im Jahr 2019 waren stochastische Prozesse ein fest etabliertes Thema des Leistungskurses der gymnasialen Oberstufe im Land Niedersachsen. Stochastische Prozesse sind ein Teilgebiet der Stochastik und beschreiben Vorgänge, bei denen zufällige Zustandsänderungen geschehen, welche zeitlich geordnet sind. Diese bilden somit die Basis für die stochastische Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Eine Möglichkeit, diese Prozesse darzustellen, beruht auf der Verwendung von Matrizen. In der Mathematik und in allen naturwissenschaftlichen Bereichen werden Matrizen für die Modellierung diverser Strukturen verwendet. So auch bei den stochastischen Vorgängen, welche die Darstellung und Berechnung dieser Prozesse deutlich vereinfacht.

Auch wenn die stochastischen Prozesse aus dem Kerncurriculum gestrichen wurden, ist es weiterhin ein bedeutendes Thema, welches Beachtung erfordert. Diesem bedeutenden Thema widmet sich diese Facharbeit, indem stochastische Prozesse mithilfe von Matrizen dargestellt werden, um diese anschließend zu untersuchen. Dabei werden auch die Vorteile der Nutzung von Matrizen verdeutlicht.

Das Ziel dabei ist es, dem Leser Möglichkeiten aufzuzeigen, wie mithilfe von Matrizen stochastische Prozesse dargestellt und untersucht werden können.

Um dies zu zeigen, werden zunächst zum besseren Verständnis unbekannte Begriffe definiert, darauf aufbauend werden Untersuchungen und Berechnungen vorgenommen.

Ob stochastische Prozesse, auch in Verbindung mit Matrizen, im zukünftigen Mathematikunterricht wieder zum Einsatz kommen sollten, wird abschließend in der Reflexion in einem kurzen Statement beantwortet.

## 2 Matrizen

### 2.1 Definition

Unter Matrizen versteht man eine Art Tabelle, in denen Elemente in Zeilen  $m$  und Spalten  $n$  aufgeschrieben werden können. Um eine Matrix befinden sich Klammern, die diese eingrenzen. Eine Matrix wird im Normalfall mit einem Großbuchstaben wie  $A$  angegeben.

Diese Elemente werden Koeffizienten genannt, welche wie folgt angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Diese oben gezeigte Matrix ist eine  $m \times n$  (sprich: m kreuz n) Matrix, da die Zeilen mit der Variable  $m$  und die Spalten mit der Variable  $n$  dargestellt werden.

### Nennung einzelner Elemente der Matrix:

Nehmen wir nun ein einzelnes Element  $(a_{ij})$  aus der  $m \times n$  Matrix: Nun gibt  $i$  den Zeilenindex von  $(a_{ij})$  an, während  $j$  den Spaltenindex von  $(a_{ij})$  beschreibt ([1]).

Darstellung einer Matrix mit Element  $(a_{ij})$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$(a_{ij})$  ist somit das Element der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte der Matrix  $(a_{mn})$

## 2.2 Arten von Matrizen

Es gibt verschiedene Arten von Matrizen zur Darstellung:

**Quadratische Matrix:** In einer quadratischen Matrix gibt es gleich viele Spalten und Zeilen, sodass gilt:  $M = N$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

**Nullmatrix:** In einer Nullmatrix sind alle Elemente Null. Sie ist gleichwertig zu Null der Zahlen im reellen Raum ([2]).

**Einheitsmatrix:** Die Elemente der Hauptdiagonale sind 1, alle anderen Elemente sind 0. Die Einheitsmatrix wird als gleichwertig zur 1 der Zahlen im reellen Raum betrachtet ([2]). Mithilfe der Einheitsmatrix können ebenso Gleichungssysteme gelöst werden, wie bei der Inversion von Matrizen gezeigt wird.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Stochastische Matrix:** Diese Art einer Matrix ist die, mit der sich diese Facharbeit insbesondere beschäftigt. Sie hat die Besonderheit, dass die Spaltensumme = 1 ist. Dies ist immer der Fall, auch wenn eine stochastische Matrix potenziert wird. Das ist darauf zurückzuführen, dass bei Zustandsänderungen maximal 100 % des Zustandes wechseln kann, was im weiteren Verlauf noch genauer erklärt wird. Stochastische Prozesse sind zudem auch immer quadratische Matrizen.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Anwendungen einer Matrix

Wie nun gezeigt wurde, ist eine Matrix flexibel einsetzbar, was in sehr vielen verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten resultiert. Im Folgenden werden die wichtigsten und am häufigsten eingesetzten Anwendungsmöglichkeiten gezeigt:

### Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise:

Ein Gleichungssystem mit unbegrenzter Anzahl an Variablen kann in eine Matrixschreibweise umgeschrieben werden, indem die Koeffizienten der Gleichung in eine Matrix verfasst werden.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + 10x_2 - 3x_3 &= 16 \\ 1x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 13 \\ -1 & 10 & -3 & 16 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pro Spalte sind nun die Koeffizienten für jede Variable  $x_1, x_2, x_3$  notiert, in der letzten Spalte steht die rechte Seite der Gleichung.

## Vektor als Matrix

Auch ein Vektor, der aus dem aktuellen Matheunterricht bekannt ist, ist eine Matrix. Diese wird jedoch nicht mit einem Großbuchstaben angegeben, sondern mit  $\vec{v}$ . Vektoren bestehen nur aus einer Spalte:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

## Weitere Anwendungen

Abgesehen vom Lösen von Gleichungssystemen finden Matrizen auch in der Wirtschaft und in der Physik ihre praktische Verwendung ([3], Kapitel 2). In der Wirtschaft können Firmendaten in einer Matrix notiert und somit einfach berechnet werden, des Weiteren bieten Matrizen viele Möglichkeiten zur Marktanalyse ([3], Kapitel 2). In der Physik werden Matrizen für die Elektrotechnik wie z. B. dem Maschenstromverfahren verwendet, bei dem komplexe Schaltungen analysiert werden. Auch in der Informatik finden Matrizen ihre Anwendung wie zum Beispiel im Grafikdesign oder bei Codierungen ([3], Kapitel 2).

## 2.4 Rechenarten

### Addition:

Die Matrizenaddition besteht aus der Addition der einzelnen Elemente von Matrix A mit den Elementen von Matrix B; beide Matrizen müssen dabei gleich viele Spalten und Zeilen haben.

Es gilt:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

### Subtraktion:

Für die Subtraktion muss ebenso wie bei der Addition die Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen, dann kann jedes Element der Matrix A von jedem Element der Matrix B subtrahiert werden.

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$$

### Skalare Multiplikation:

Für die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar (Zahl) wird jedes Element der Matrix mit dem Wert des Skalars multipliziert.

$$s * A = s * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * a_{11} & s * a_{12} \\ s * a_{21} & s * a_{22} \end{pmatrix}$$

### Multiplikation zweier Matrizen:

Für die Multiplikation zweier Matrizen muss die Spaltenanzahl  $n$  der einen Matrix mit der Zeilenanzahl  $m$  der anderen Matrix übereinstimmen. Ist dies gegeben, multipliziert man für jedes Element der neuen Matrix C jedes Element von Matrix A der selben Zeile wie das neue Element von links nach rechts mit jedem Element von Matrix B der selben Spalte von oben nach unten, diese Produkte werden schlussendlich addiert.

$$A * B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist, d.h. dass  $A * B \neq B * A$  ist.

Man sagt umgangssprachlich: „Jede Zeile mal der Spalte“ ([4], Seite 19).

### Potenzieren:

Das Potenzieren einer Matrix verläuft wie das Potenzieren einer reellen Zahl. Die Matrix wird so oft mit sich selbst multipliziert, wie der Exponent angibt.

### Division:

Die Division einer Matrix durch eine andere Matrix ist nicht definiert, es besteht lediglich die Möglichkeit, mit der Inversen (Kehrwert) einer Matrix eine andere Matrix zu multiplizieren, dies kann man als Division auffassen.

Bildung einer inversen Matrix:

Ein Möglichkeit, die **Inverse** zu bilden, geht in drei Schritten, was an folgendem Beispiel gezeigt wird:

Zuerst wird neben einer Matrix eine Einheitsmatrix mit der gleichen Zeilen- und Spaltenanzahl geschrieben.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun wird die Matrix so umgeformt, dass im linken Teil der Matrix eine Einheitsmatrix steht, im rechten Teil befindet sich nun die inverse Matrix.

Eine Möglichkeit, diese umzuformen, besteht darin, beide Matrizen als eine Matrix anzusehen und das Gleichungssystem zu lösen. Dies geht beispielsweise im CAS Ti-nspire mit dem Befehl *rref()*:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

Diese entstandene Matrix kann nun mit einer zweiten Matrix multipliziert werden, um eine Division darzustellen; eine echte Division ist jedoch nicht definierbar und deshalb auch nicht durchführbar.

### 3 Stochastische Prozesse

#### 3.1 Definition von Stochastik und stochastischen Prozessen

Die Stochastik „ist ein Sammelbegriff für die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik“ ([5], Kapitel 2); sie wird auch Mathematik des Zufalls genannt ([5]). In der Stochastik befasst man sich mit zufälligen Vorgängen wie beispielsweise Münzspiele oder Ähnlichem, mit welchen man mithilfe von Statistiken Schlüsse auf die Wahrscheinlichkeiten ziehen kann ([5]). Damit sind nun verschiedene Berechnungen möglich, welche die „theoretische Untersuchung statistischer Verfahren“ ([5]) bilden.

**Stochastische Vorgänge** sind ein Teilthema der Stochastik. Sie beschreiben Vorgänge, welche zufällig, jedoch zusätzlich auch zeitlich geordnet sind. Sie bilden die Grundlage für die Wahrscheinlichkeitstheorie, die stochastische Analysis ([6]).

#### 3.2 Markow-Ketten

Markow-Ketten sind stochastische Prozesse, bei denen das Ziel ist, Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse zu berechnen. Dies ist bei Prozessen möglich, welche endlich viele Zustände und konstante Übergangswahrscheinlichkeiten in andere Zustände haben ([7], Seite 153). Zu Beginn des Prozesses gibt es eine Startverteilung auf die verschiedenen Zustände, sodass nach verschiedenen Durchläufen eine neue Zustandsverteilung berechnet werden kann.

Prozessdiagramme, auch Übergangsdiagramme genannt, dienen der Darstellung von Prozessen:

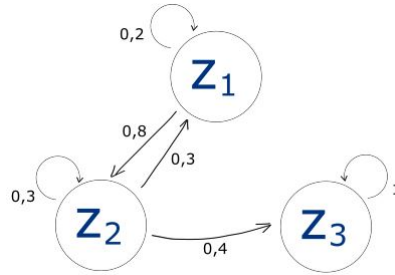


Abbildung 1: Beispiel eines Prozessdiagramms ([8])

Hier sieht man, wie die Wahrscheinlichkeiten in einem Prozessdiagramm mithilfe von Pfeilen und ihrer Wahrscheinlichkeit von 0 bis 1 dargestellt werden; 0 entspricht 0 %, 1 entspricht 100 %.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Summe aller Pfeile, welche aus einem Zustand hinausführen, immer 1 (also 100 %) ist.

Die Zustände werden meist mit  $Z_1, Z_2, Z_3 \dots$  dargestellt.

Die Anzahl an Durchgängen dieser Markow-Kette wird mit  $n$  symbolisiert.  $n$  beschreibt hier die Anzahl an Durchgängen, somit ist die Verteilung für  $n = 0$  die Startverteilung des Prozessdiagrammes.

Prozessdiagramme dieser Art können in eine Matrixenschreibweise umgewandelt werden. Siehe folgendes Beispiel:

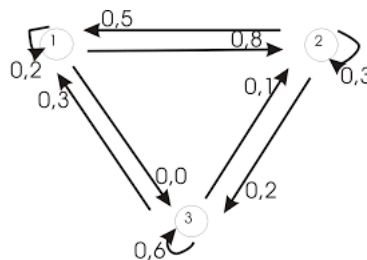


Abbildung 2: Prozessdiagramm A:[9]

Nun wird das Diagramm in die folgende Matrix umgewandelt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{A} & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ \mathbf{B} & 0,8 & 0,3 & 0,1 \\ \mathbf{C} & 0,0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Die fett markierten Buchstaben  $A, B, C$  beschreiben die Zustände  $Z_1, Z_2, Z_3$ ; die Zustandsverteilungen werden von der oberen Zeile zur linken Spalte angegeben ([10], Seite 50).

Beispielsweise beträgt deswegen die Zustandsverteilung von  $Z_2$  (B) zu  $Z_1$  (A) 0,5; also 50 % des Zustandes  $Z_2$  geht in Zustand  $Z_1$  über.

Die Zustandsverteilung wird oft mit einem Vektor  $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \dots \end{pmatrix}$  angegeben.

$\vec{v}_0$  beschreibt den Anfangsverteilung, diese ist für spätere Aufgaben essentiell.

### 3.2.1 Berechnung von Zuständen

Wir haben folgende Matrix  $A_n$ , welche die Zustandsänderungen zweier Zustände  $A, B$  beschreibt.  $n$  beschreibt die Anzahl an Durchläufen:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Das Ziel ist es nun, Zustände zu berechnen, welche nach beliebig vielen Durchläufen entstanden sind. Um einen Zustand nach  $n = 1$  zu berechnen, berechnet man von der Startverteilung aus die einzelnen Zustände. Geht man von einer Startverteilung von  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$  aus, so beträgt die Zustandsverteilung:

$$A_n = 0,3 * A_{n-1} + 0,4 * B_{n-1}$$

$$B_n = 0,7 * A_{n-1} + 0,6 * B_{n-1}$$

Für  $n = 1$ :

$$A_1 = 0,3 * 50 + 0,4 * 50 = 35$$

$$B_1 = 0,7 * 50 + 0,6 * 50 = 65$$

$$\vec{v}_1 \text{ beträgt also nun: } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 35 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Wie man nun erkennen kann, handelt es sich bei der Formel um eine rekursive Formel, welche ungünstig zu berechnen ist. Diese wird in eine explizite Formel umgerechnet.

Hier bietet sich erneut die Matrizenschreibweise an: Um die Verteilung nach  $n$  Durchläufen zu berechnen, wird die Matrix  $A$ , welche die Zustandsverteilung angibt, mit der Anzahl an Durchläufen  $n$  potenziert. Die daraus resultierende Matrix wird nun mit der Anfangsverteilung als Vektor multipliziert. Die daraus resultierende Matrix beschreibt jetzt zeilenweise die Zustandsverteilungen nach  $n$  Durchläufen.

Beispiel:

$$n = 10; A^{10} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0,364 & 0,364 \\ 0,636 & 0,636 \end{pmatrix}$$

Nach der Potenzierung der Matrix wird diese mit der Anfangsverteilung multipliziert:

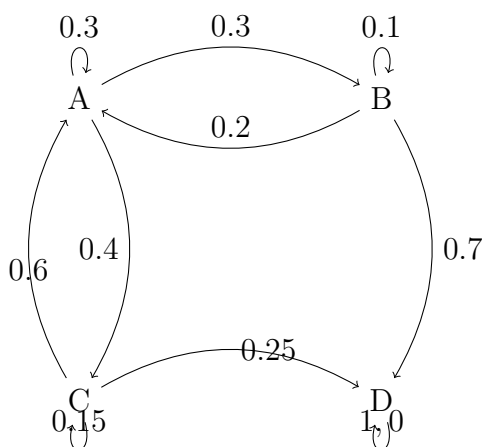
$$\begin{pmatrix} 0,364 & 0,364 \\ 0,636 & 0,636 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36,264 \\ 63,636 \end{pmatrix}$$

Zustand  $A$  beträgt somit nach zehn Durchläufen 36,264; Zustand  $B$  beträgt 63,636.

### 3.2.2 Ein Beispiel zur Verdeutlichung der Vorteile

Nachdem die verschiedenen Rechenmethoden der stochastischen Vorgänge mithilfe von Matrizen dargestellt wurden, werden im folgenden Beispiel die Vorteile der Matrizendarstellung dargestellt:

Zu sehen ist eine Zustandsverteilung von vier Zuständen  $A, B, C, D$ . Eine Besonderheit besteht darin, dass es bei Zustand  $D$  keine weiteren Zustandsveränderungen gibt, 100 % des Zustandes  $D$  bleibt auch bei  $D$ . Solch ein Zustand wird deswegen auch als absorbierend bezeichnet ([7], Seite 381), da der Zustand erreicht, aber nicht mehr verlassen werden kann. Ziel ist es, verschiedene Zustandsverteilungen nach einer bestimmten Anzahl an Durchgängen  $n$  zu berechnen.



Man nimmt für die Zustandsverteilung  $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$  an.

Wie man nun bereits erkennen kann, ist dieses Prozessdiagramm umständlich zu lesen und es ist schwer, sich einen Überblick zu verschaffen. Außerdem ist es nur mit vielen Notizen und Rechenwegen möglich, Zustandsänderungen nach wenigen Durchgängen zu ermitteln, für eine höhere Anzahl an Durchgängen ist es nahezu unmöglich. Mit der Matrizenschreibweise können beide Probleme reduziert werden:

Man schreibt das Prozessdiagramm, wie bereits gezeigt, in ein Matrix um:

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}$$

Es soll die Zustandsverteilung nach drei Durchläufen berechnet werden. Man potenziert als erstes die Matrix  $A$  und multipliziert diese dann mit dem Anfangsbestand:

$$\begin{aligned} \vec{v}_3 = A^3 * \vec{v}_0 &= \begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,6 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,25 & 1 \end{pmatrix}^3 * \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,249 & 0,086 & 0,275 & 0 \\ 0,129 & 0,031 & 0,100 & 0 \\ 0,183 & 0,044 & 0,147 & 0 \\ 0,439 & 0,839 & 0,479 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21,463 \\ 9,7 \\ 13,934 \\ 54,903 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit wurde im Vergleich zur rekursiven Formel die Zustandsverteilung nach  $n = 3$  Durchläufen deutlich vereinfacht berechnet.

### 3.2.3 Grenzwertuntersuchungen bei Markow-Ketten

Durch die Möglichkeit, Zustände nach vielen Durchgängen zu berechnen, stellt sich die Frage, wie sich eine stochastische Matrix bei  $n \rightarrow \infty$  Durchgängen verhält.

Betrachten wir nun einen stochastischen Prozess  $A_n$ , wo  $n$  die Anzahl an Durchgängen beschreibt:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Mit der Zustandsverteilung  $A = 100$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  werden beliebig viele Durchgänge berechnet:

(Werte werden auf drei Nachkommastellen gerundet)

| Anzahl an Durchläufen | Zustand A | Zustand B | Zustand C |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------|
| 0                     | 100       | 0         | 0         |
| 1                     | 30        | 30        | 40        |
| 2                     | 50        | 19        | 31        |
| 3                     | 45,5      | 21,9      | 32,6      |
| 4                     | 46,3      | 21,29     | 32,41     |
| 8                     | 46,206    | 21,379    | 32,414    |
| 9                     | 46,207    | 21,379    | 32,414    |
| 10                    | 46,207    | 21,379    | 32,414    |
| 11                    | 46,207    | 21,379    | 32,414    |
| 100                   | 46,207    | 21,379    | 32,414    |

Man erkennt, dass bereits ab  $n = 8$  Durchläufen sich die Zustandsverteilung nicht mehr verändert. Diese Zustandsverteilung, die bei  $n \rightarrow \infty$  entsteht, wird Grenzvektor  $\vec{v}_\infty$  genannt ([11], Seite 9). Bei der Potenzierung der Matrix mit  $n$  Durchläufen verändert sich logischerweise die Matrix, aus der die Zustandsverteilungen resultieren, ab  $n = 8$  nicht mehr. Diese Matrix wird deswegen Grenzmatrix  $G$  genannt ([10], Seite 51). Die Grenzmatrix beträgt in diesem Beispiel:

$$G = \begin{pmatrix} 0,462 & 0,462 & 0,462 \\ 0,214 & 0,214 & 0,214 \\ 0,324 & 0,324 & 0,324 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Grenzvektor beträgt:  $\vec{v}_\infty = \begin{pmatrix} 46,207 \\ 21,379 \\ 32,414 \end{pmatrix}$

Man erkennt hier, dass die Ziffern aus der Grenzmatrix mit denen des Grenzvektors übereinstimmen. Daraus kann man annehmen, dass der Grenzvektor unabhängig von der Anfangsverteilung ist. Wir versuchen, diese Annahme zu bestätigen, indem die Anfangsverteilung auf  $A = 50$ ,  $B = 25$ ,  $C = 25$  geändert wird.

Nun beträgt der Grenzvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,462 & 0,462 & 0,462 \\ 0,214 & 0,214 & 0,214 \\ 0,324 & 0,324 & 0,324 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46,207 \\ 21,379 \\ 32,414 \end{pmatrix}$$

Da der Grenzvektor  $\vec{v}$  gleich ist, kann die Annahme bestätigt werden. Der Grenzvektor dieser Matrix ist somit vom Anfangszustand unabhängig.

Nachdem gezeigt wurde, wie sich die Zustandsverteilung und Matrix im Grenzzustand verhält, soll dies im Folgenden auf alle Matrizen verallgemeinert werden:

Um eine Prognose zu erstellen, wie sich der Prozess im Laufe der Zeit zum Grenzzustand hin verhält, werden oft Eigenvektoren und ihre Eigenwerte verwendet. Um dies zu erklären, wird etwas ausgeholt:

Dafür benötigt man den Eigenwert  $\lambda$ , welcher angibt, um wie viel der Eigenvektor gestreckt/gestaucht gegenüber dem Vektor ist, welcher mit einer Matrix  $A$  multipliziert wurde. Ein Eigenvektor ist ein Vektor, der mit einer Matrix multipliziert sich selbst gestreckt/gestaucht ergibt, sodass gilt:  $A * \vec{v} = \lambda * \vec{v}$ .

Dieser Eigenwert gibt an, wie sich die Matrix für den Grenzzustand verhält und ob dieser Prozess in bestimmte Richtungen konvergiert, d.h. sich einem Grenzverhalten nähert.

Dafür subtrahiert man eine Einheitsmatrix mit  $\lambda$  anstatt von 1 in der Hauptdiagonale von der Matrix, von der der Eigenvektor und -wert gefunden werden soll. Zur Vereinfachung wird eine  $2 \times 2$  Matrix verwendet:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 - \lambda & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Daraus wird nun die Determinante berechnet, welche sich aus der Formel  $\det(A) = a_{11} * a_{22} - a_{21} * a_{12}$  ergibt. Für eine  $3 \times 3$  Matrix beträgt die Formel:  $\det(A) = a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32} - a_{31} * a_{22} * a_{13} - a_{32} * a_{23} * a_{11} - a_{33} * a_{21} * a_{12}$

Angewandt bedeutet es für unser Beispiel:

$$\det(A) = (0,4 - \lambda) * (0,1 - \lambda) - 0,6 * 0,9 = \lambda^2 - 0,5 * \lambda - 0,5$$

Die Gleichung, die wir nun erhalten haben, ist eine quadratische Funktion. Von dieser werden nun die Nullstellen berechnet:

$$\lambda^2 - 0,5 * \lambda - 0,5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -0,5 \vee \lambda = 1$$

Somit haben wir die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = -0,5$ ;  $\lambda_2 = 1$ .

Wenn man die Eigenwerte betrachtet, gibt es drei Möglichkeiten an Eigenwerten:

- a) Alle Eigenwerte sind kleiner als Eins, so zerfällt (konvergiert) der Prozess gegen Null([10], Seite 54).
- b) Ein Eigenwert ist Eins, der andere ist kleiner als Eins, so konvergiert der Prozess (er nähert sich selbst an)([10], Seite 54).
- c) Ist einer der beiden Eigenwerte größer als Eins, so wächst der Prozess beliebig an ([10], Seite 54).

Es ist zu beachten, dass der Eigenwert einer stochastischen Matrix maximal Eins sein kann ([10], Seite 44), dies ist auf die maximale Spaltensumme, welche auch Eins ist, zurückzuführen.

In unserem Beispiel, wo ein Eigenwert Eins ist und der andere negativ, tritt somit Fall b) ein. Der Prozess nähert sich somit selbst an. Dies kann rechnerisch bestätigt werden:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,599 \\ 0,400 & 0,401 \end{pmatrix}; A^{100} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Man erkennt hier, dass die Matrix mit steigender Anzahl an Durchläufen zusammenläuft, sodass für  $n \rightarrow \infty$  der Prozess konvergiert.

Es stellt sich nun die Frage, ob man den Grenzvektor immer von der Anfangsverteilung unabhängig machen kann. Im ersten Beispiel ist bewiesenermaßen der Grenzzustand unabhängig von der Verteilung der Zustände zu Anfang. Dies ist jedoch nicht immer so. Betrachten wir daher folgendes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ([10], \text{Seite } 54), A^{1000} = \begin{pmatrix} 0,571 & 0,571 & 0 \\ 0,429 & 0,429 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Um nun einen Grenzwert zu symbolisieren, wurde die Matrix nach 1000 Durchgängen berechnet (entspricht fast der Grenzmatrix, da mit steigender Anzahl an Durchläufen die Matrix der Grenzmatrix mehr und mehr entspricht).

Es ist bereits auffällig, dass anders als in dem ersten Beispiel, nicht jedes Element einer Zeile gleich ist. Daraus könnte man schließen, dass der Anfangsbestand nun doch von Bedeutung ist. Es werden zwei verschiedene Anfangsbestände getestet:

$$v_{1000}^{\vec{}} = A^{1000} * \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57,143 \\ 42,857 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{1000}^{\vec{}} = A^{1000} * \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,571 \\ 21,429 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Jetzt kann bestätigt werden, dass der Anfangszustand nun doch sehr entscheidend ist. Sind nicht alle Elemente einer Zeile gleich, so kann man festhalten, dass es keinen eindeutigen Grenzvektor  $v_{\infty}^{\vec{}}$  gibt. Dies kann man auch anhand von Eigenwerten feststellen.

Zuerst berechnet man den Eigenwert mithilfe der Determinante:

$$\det(A) = (0,4 - \lambda) * (0,2 - \lambda) * (a - \lambda) - 1 * 0,6 * 0,8 = -\lambda^3 + 1,6 * \lambda^2 - \lambda + 0,4$$

Es werden nun die Nullstellen berechnet:

$$0 = -\lambda^3 + 1,6 * \lambda^2 - \lambda + 0,4 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Bei einer kubischen Funktion müsste es drei Nullstellen geben; da hier die einzige Lösung 1 ist, dies ist somit ein *mehrfacher Eigenwert*. Dieser mehrfache Eigenwert von 1 hat die Besonderheit, dass die Spalten der Grenzmatrix voneinander verschieden sind und deswegen die Grenzverteilung  $v_{\infty}^{\vec{}}$  von der Startverteilung abhängig ist ([10], Seite 54). Ist die 1 nur einmal als Eigenvektor vertreten (einfacher Eigenwert), so ist der Grenzvektor  $v_{\infty}^{\vec{}}$  vom Anfangszustand unabhängig.

→In dem Beispiel mit den mehrfachen Eigenwerten gibt es somit keinen eindeutigen Grenzvektor.

## 4 Reflexion über Sinnhaftigkeit im Unterricht

In dieser Facharbeit wurden stochastische Prozesse vorgestellt und es wurde gezeigt, wie man diese mithilfe von Matrizen darstellen und untersuchen kann. Dabei stellte sich die Frage, ob es sinnvoll war, dass das Thema der stochastischen Prozesse aus dem Kerncurriculum der gymnasialen Oberstufe gestrichen wurde und kein Bestandteil des Abiturs mehr ist.

Ein Vorteil der stochastischen Prozesse ist es, dass diese durch realitätsnahe Vorgänge wie Münzspiele oder ähnliche „Glücksspiele“ einfach dargestellt werden können. Dies hat zur Folge, dass Schüler und Schülerinnen durch solche praktische Anwendungen die Theorie zu stochastischen Prozessen leicht verstehen können.

Ein weiterer Vorteil der Verwendung von Matrizen besteht darin, dass die Schüler und Schülerinnen zeitgleich zur Stochastik auch stark ausgeprägte Grundlagen der Matrizen erlernen, welche eine perfekte Vorbereitung für naturwissenschaftliche Studiengänge oder Ausbildungen bieten. Da Matrizen in fast allen MINT-Fächern ihre Anwendung finden, ist es sehr sinnvoll, bereits in der Schule möglichst viel über sie zu erfahren und zu lernen.

Ein kleines Problem ist jedoch, dass komplexere stochastische Prozesse schwer zu visualisieren sind und deswegen deren Erschließung für viele Schüler und Schülerinnen schwer verständlich sein kann. Das geschieht meistens, wenn die Prozesse sehr theoretisch aufgebaut sind und keinen Bezug zur Wirklichkeit haben, was dadurch den Lernfortschritt beeinträchtigen könnte.

Dennoch bin ich der Meinung, dass stochastische Prozesse in das Kerncurriculum der Mathematik für die gymnasiale Oberstufe des Landes Niedersachsen wieder aufgenommen werden sollen, da die obigen Vorteile eindeutig überwiegen. Besonders die Verwendung von Matrizen erachte ich als besonders sinnvoll, da dadurch solche Prozesse strukturierter dargestellt werden und Zustände einfach berechnet werden können. Sie bilden somit eine nützliche Erweiterung des bereits vorhandenen Themas der Stochastik.

## 5 Anhang

### Literaturverzeichnis

#### Literatur

- [1] E. Brieskorn, “Lineare Algebra und analytische Geometrie.” *Vieweg & Sohn, Braunschweig*, 1983.
- [2] unbekannt. (2020) Rechnen mit Matrizen. [Online]. Available: <https://www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/matrizen/#:~:text=Matrizen%20bestehen%20aus%20m%20Zeilen,Spalten%20ist%20m%20ÄÛ%20n%20.&text=Die%20Elemente%20einer%20Matrix%20bezeichnet%20man%20auch%20als%20Koeffizienten!>
- [3] M. Osswald. (2016) Die Anwendung von Matrizen bei der Netzwerkanalyse. [Online]. Available: <https://www.grin.com/document/448526>
- [4] P. Neumann, *Lambacher Schweizer Schwerpunktthemen Zentralabitur 2011*. Ernst Klett, Stuttgart & Leipzig, 2009.
- [5] R.-U. Bochum. (2023) Was ist Stochastik? [Online]. Available: <https://www.ruhr-uni-bochum.de/mathematik3/lehrstuhl/index.html>
- [6] (2022) Stochastischer Prozess. [Online]. Available: [https://de.wikipedia.org/wiki/Stochastischer\\_Prozess#:~:text=Ein%20stochastischer%20Prozess%20\(auch%20Zufallsprozess,Grundlage%20fÄijr%20die%20stochastische%20Analysis.](https://de.wikipedia.org/wiki/Stochastischer_Prozess#:~:text=Ein%20stochastischer%20Prozess%20(auch%20Zufallsprozess,Grundlage%20fÄijr%20die%20stochastische%20Analysis.)
- [7] D. Brandt and G. Reinelt, “Lambacher Schweizer,” *Mathematik für Gymnasien. Gesamtband Oberstufe mit CAS*. Klett, Stuttgart, 2007.
- [8] A. Hinsmann. (2022) Markov-Kette Online Tool für die Textgenerierung. [Online]. Available: <https://inlaut.de/Markov-Kette.html>
- [9] C. Grigutsch. (2003) Leistungsbewertung von TCP. [Online]. Available: [http://www-i4.informatik.rwth-aachen.de/content/teaching/seminars/sub/2002\\_2003\\_ws\\_docs/LeistungsbewertungVonTCP.pdf](http://www-i4.informatik.rwth-aachen.de/content/teaching/seminars/sub/2002_2003_ws_docs/LeistungsbewertungVonTCP.pdf)
- [10] R. Vehling, “Mehrstufige Prozesse,” *DASU-Symposium, Matrizen im Mathematikunterricht*, 2008.
- [11] G. Roolfs. (unbekannt) Markow. [Online]. Available: <http://groolfs.de/Vektorpdf2/Markow.pdf>

## Abbildungsverzeichnis

## Abbildungsverzeichnis

|   |                                                 |   |
|---|-------------------------------------------------|---|
| 1 | Beispiel eines Prozessdiagramms ([8]) . . . . . | 7 |
| 2 | Prozessdiagramm A:[9] . . . . .                 | 7 |

# Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 19. März 2023

---

Lukas Röttmann

# Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 19. März 2023

---

Lukas Röttmann