



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

# Taylorreihen – eine Untersuchung

*Jarne Seibt*

NOTE: \_\_\_\_\_

PUNKTZAHL: \_\_\_\_\_

.....  
UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

19. März 2023

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Historischer Hintergrund – Brook Taylor</b>                 | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Mathematische Grundlagen</b>                                | <b>1</b>  |
| 2.1      | Folgen und Reihen . . . . .                                    | 1         |
| 2.2      | Konvergente und divergente Reihen . . . . .                    | 2         |
| 2.3      | Potenzreihe . . . . .                                          | 2         |
| <b>3</b> | <b>Untersuchung der Taylorreihe</b>                            | <b>2</b>  |
| 3.1      | Grundgedanke der Approximation . . . . .                       | 2         |
| 3.2      | Herleitung der Taylorreihe . . . . .                           | 3         |
| 3.3      | Konvergenzradius . . . . .                                     | 4         |
| 3.3.1    | Wurzelkriterium von Cauchy . . . . .                           | 5         |
| 3.3.2    | Quotientenkriterium . . . . .                                  | 5         |
| 3.4      | Restgliedabschätzung . . . . .                                 | 6         |
| 3.4.1    | Das Langrangesche Restglied . . . . .                          | 6         |
| <b>4</b> | <b>Anwendungsbeispiele</b>                                     | <b>7</b>  |
| 4.1      | Taylorentwicklung der Sinusfunktion . . . . .                  | 7         |
| 4.2      | Taylorentwicklung der Kosinusfunktion . . . . .                | 8         |
| 4.2.1    | Konvergenzradius der Kosinusfunktion . . . . .                 | 9         |
| 4.2.2    | Restgliedabschätzung der Kosinusfunktion . . . . .             | 10        |
| 4.3      | Taylorentwicklung der e-Funktion . . . . .                     | 11        |
| 4.4      | Taylorentwicklung einer gebrochenrationalen Funktion . . . . . | 11        |
| 4.4.1    | Konvergenzradius einer gebrochenrationalen Funktion . . . . .  | 12        |
| 4.5      | Taylorreihen in der Praxis . . . . .                           | 14        |
| 4.6      | Taylorreihen als Unterrichtsinhalt . . . . .                   | 15        |
| <b>5</b> | <b>Anhang</b>                                                  | <b>16</b> |

# 1 Historischer Hintergrund – Brook Taylor

Am 18. August 1685 wurde Brook Taylor in Edmonton, nahe London, geboren. Seine Familie war wohlhabend und sein Vater legte schon früh großen Wert auf die Bildung seines Sohnes und ließ ihn bis zu dessen 17. Lebensjahr durch einen Hauslehrer unterrichten. Auch das Jurastudium am St. John's College absolvierte Taylor auf Drängen des Vaters. Auch wenn er dieses im Jahr 1714 erfolgreich mit der Doktorwürde abschloss, galt doch schon im Studium sein besonderes Interesse der Mathematik. Er arbeitete an ersten Publikationen und knüpfte Kontakte zu anderen Mathematikern, zum Beispiel John Mauchin, durch dessen Empfehlung er 1712 in die Royal Society aufgenommen wurde. Von 1714 bis 1718 hatte er die einflussreiche Position des Sekretärs



Abbildung 1: Porträt von Brook Taylor

der Royal Society inne. 1715 veröffentlichte er seine Schrift *Methodus Incrementorum Directa Et Inversa*, in der er erste Gedanken zur späteren Taylorreihe niederschrieb. Nach mehreren persönlichen Schicksalsschlägen, dem vollständigen Kontaktabbruch durch seinen Vater, der mit Taylors erster Eheschließung nicht einverstanden war, dem Tod seiner ersten und zweiten Ehefrau und seiner ersten Tochter, verstarb er selbst im Alter von nur 46 Jahren am 29. Dezember 1731 in Somerset House in London.[1]

## 2 Mathematische Grundlagen

### 2.1 Folgen und Reihen

Wird eine unendliche Menge Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  in einer bestimmten Reihenfolge geordnet, spricht man von einer Folge. Charakteristisch dafür ist eine rekursive oder explizite Gesetzmäßigkeit, mit der sich die Folge beschreiben lässt. Addiert man nun die ersten  $n$  Glieder einer Folge, erhält man die Partialsummen  $S_n$ . Die Folge der Partialsummen  $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$  wird wiederum Reihe genannt.

Allgemein gilt:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

## 2.2 Konvergente und divergente Reihen

Grundlage für eine Approximation mittels der Taylorreihe ist die Konvergenz, die wie folgt definiert ist:

„Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt konvergent, wenn die Folge der Teilsummen  $S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$  konvergiert. Strebt  $S_n \rightarrow S$ , so sagt man, die Reihe konvergiere gegen  $S$ , schreibt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$  und nennt  $S$  den Wert oder wohl auch die Summe der Reihe. Eine nicht konvergente Reihe wird divergent genannt.“ [2]

Eine solche läuft entweder gegen  $\pm\infty$  oder sie oszilliert. Im Verlauf der Arbeit wird auch der Begriff der *absoluten* Konvergenz verwendet, eine stärkere Art der Konvergenz, die aber in dem Kontext dieser Arbeit nicht von Bedeutung ist.

## 2.3 Potenzreihe

Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

Dabei ist  $x_0$  die Entwicklungsstelle und  $a_k$  sind die Koeffizienten. Auch die Taylorreihe fällt in die Gruppe der Potenzreihen. [3]

## 3 Untersuchung der Taylorreihe

### 3.1 Grundgedanke der Approximation

Gewisse Objekte sind in der Mathematik schwer zu handhaben, [4] beispielsweise Gebilde aus trigonometrischen, logarithmischen oder exponentiellen Funktionen können die Arbeit erschweren. In diesen Fällen bietet es sich an, eine Annäherung über eine unkompliziertere Funktion vorzunehmen, die die ursprüngliche Funktion möglichst präzise beschreibt.[3] Im Fall der Taylorreihe werden dazu Potenzfunktionen verwendet, diese haben den Vorteil, dass sie nur die Grundrechenarten verwenden und sehr einfach abzuleiten und zu integrieren sind.

## 3.2 Herleitung der Taylorreihe

Man nimmt die allgemeine Form einer Potenzfunktion n-ter Ordnung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

als Grundgerüst für die Funktion, die die stetige Ausgangsfunktion approximieren soll. Um dies umzusetzen, ist der Grundgedanke, dass Ausgangs- und Approximationsfunktion dann übereinstimmen, wenn es ihre Ableitungen an einer bestimmten Stelle auch tun. Diese Stelle wird **Entwicklungsstelle**  $x_0$  genannt. Die Taylorreihe kann als eine Anleitung zur Bildung einer Polynomfunktion verstanden werden, deren Ableitungen mit der der Ausgangsfunktion übereinstimmen werden.

Zum besseren Verständnis der Taylorreihe betrachtet man zunächst die ersten Ableitungen der Ausgangsfunktion  $f$  an der Stelle  $x = 0$ :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2x + \dots + n \cdot a_nx^{n-1}$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_nx^{n-2}$$

$$f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_nx^{n-3}$$

$$f'''(0) = 6a_3$$

Hier zeigt sich deutlich, dass jede Ableitung von genau einem Koeffizienten der Polynomfunktion abhängig ist. Allgemein gilt damit für die Stelle  $x = 0$ :

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

Um aus diesem Zusammenhang einen Koeffizienten für die Polynomfunktion zu konstruieren, muss durch  $k!$  geteilt werden. Für jeden Koeffizienten gilt somit:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Durch diese Beschreibung eines jeden Koeffizienten kann eine vollständige Anleitung zur Bildung der Polynomfunktion in Form der Taylorreihe zusammengesetzt werden. Diese Anleitung gilt nicht nur für  $x = 0$ , sondern ist für jede

Entwicklungsstelle  $x_0$  anwendbar. Daraus ergibt sich diese unendliche Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x-x_0)^3 + \dots$$

Da das Arbeiten mit einer unendlichen Reihe nicht möglich ist, wird über den Prozess der **Taylorentwicklung** das endliche **Taylorpolynom**  $T_n(x)$  gebildet, das aus den ersten  $n$  Gliedern der Taylorreihe besteht:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Die ersten drei Glieder von  $T_n(x)$  erfüllen dabei ihren Zweck besonders anschaulich. Der Funktionswert  $f(x_0)$  ist für die Festsetzung der Höhe des Polynoms an der Entwicklungsstelle verantwortlich und würde allein eine horizontale Gerade beschreiben, die die Ausgangsfunktion  $f$  bei  $x_0$  schneiden oder berühren würde.

Das zweite Glied  $\frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0)$  setzt über die erste Ableitung der Ausgangsfunktion die Steigung der Geraden fest. Diese beiden Glieder allein würden nun eine Tangente an der Stelle  $x_0$  beschreiben.

Durch das dritte Glied der Reihe  $\frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2$  gewinnt man über die zweite Ableitung die Erkenntnis über die Krümmung der Ausgangsfunktion und schafft eine exaktere Annäherung zusätzlich in der unmittelbaren Umgebung von  $x_0$ . Man erhält eine Schmiegeparabel.[5]

Jedes weitere Glied der Reihe erweitert dann grundsätzlich den Bereich, in dem das Polynom die Funktion  $f$  beschreibt. Ausnahmen werden im weiteren Verlauf der Arbeit und insbesondere unter Kapitel 4 Anwendungsbeispiele ausgeführt.

### 3.3 Konvergenzradius

Auch wenn viele Funktionen durch die unendliche Taylorreihe an jeder Stelle approximiert werden können, so gibt es doch Ausnahmen. Manche Funktionen können auch von der unendlichen Taylorreihe nur in einem bestimmten Bereich oder sogar nur an der Entwicklungsstelle angenähert werden. Um zu überprüfen, an welchen Stellen die Taylorreihe tatsächlich funktioniert, muss der Konvergenzradius berechnet werden. Der Begriff *Konvergenzradius* ist von den komplexen Zahlen geprägt, für die reellen Zahlen, mit denen hier gearbeitet wird, könnte man auch vom *Konvergenzbereich* sprechen. Um diesen zu berechnen, gibt es verschiedene Wege, die hier vorgestellt werden und auf verschiedenen **Konvergenzkriterien** beruhen.

### 3.3.1 Wurzelkriterium von Cauchy

Das Wurzelkriterium von Cauchy besagt, dass eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

dann absolut konvergiert, wenn

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k (x - x_0)^k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot |x - x_0| < 1$$

gilt. [2] Genutzt wird hier der **Limes superior**, der größte Häufungspunkt.

Durch Umstellen nach  $|x - x_0|$  lässt sich nun der Konvergenzradius  $r$  berechnen:

$$|x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = r$$

Man beachte, dass nur die allgemeine Beschreibung des Koeffizienten  $a_k$  in der Formel verwendet wird, die Entwicklungsstelle ist erst später für die Berechnung des Konvergenzbereichs bedeutend.

Der rechte Teil der Ungleichung wird **Cauchy-Formel** genannt. Es gilt die Vereinbarung, dass wenn der Limes superior null ergibt, der Konvergenzradius auf unendlich gesetzt wird und wenn er unendlich ergibt, der Konvergenzradius auf null gesetzt wird.

### 3.3.2 Quotientenkriterium

Das Quotientenkriterium stellt eine Alternative zur Cauchy-Formel dar. Mit seiner Hilfe lässt sich der Konvergenzradius oft einfacher berechnen, allerdings kann man es im Gegensatz zur Cauchy-Formel nicht immer anwenden. Die Bedingung dafür ist, dass tatsächlich ein Grenzwert existiert.[6] Das Quotientenkriterium besagt, dass eine Potenzreihe dann absolut konvergiert, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| < 1$$

gilt.[2] Dies lässt sich zusammenfassen in:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} (x - x_0) \right| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x - x_0| < 1$$

Durch Umstellen nach  $|x - x_0|$  lässt sich nun der Konvergenzradius  $r$  berechnen:

$$|x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r$$

Sobald man den Konvergenzradius bestimmt hat, lässt sich das zugehörige Konvergenzintervall über  $(x_0 - r, x_0 + r)$  berechnen. Die Ungleichungen machen es bei beiden Kriterien erforderlich, die Randpunkte gesondert zu überprüfen. Über ihre Konvergenz kann allein mit diesen Kriterien keine Aussage getroffen werden. Die Prüfung erfolgt über das Einsetzen der Werte in die Taylorreihe.

### 3.4 Restgliedabschätzung

Die unendliche Taylorreihe kann unter bestimmten Voraussetzungen eine Funktion  $f$  präzise und mit geringen Abweichungen beschreiben. Wenn man aber das endliche Taylorpolynom nutzt und damit unendlich viele Glieder der Taylorreihe auslässt, ist eine Abweichung und damit ein Fehler unvermeidbar. Das Ausmaß dieses Fehlers lässt sich über das Restglied  $R_n(x)$  beschreiben, es ist der Teil der Taylorreihe, der ausgelassen wird. Daher lässt sich die Funktion  $f$  nur über die Taylorreihe oder die Kombination aus Taylorpolynom und Restglied wie folgt beschreiben:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

In der Praxis wird eine Approximation häufig nur für ein bestimmtes Intervall benötigt, daher ist die maximal mögliche Abweichung für diesen begrenzten Bereich interessant. Zur Berechnung dieser Abweichung wird die Restgliedabschätzung verwendet.

#### 3.4.1 Das Langrangesche Restglied

Dies ist die klassische Darstellung des Restglieds nach Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Neu ist hier die Variable  $\xi$  („xi“). Sie liegt zwischen  $x$  und  $x_0$  und ist von  $n$ ,  $x$  sowie  $x_0$  abhängig.[2]

Den maximal möglichen Fehler erhält man, indem man den größtmöglichen Wert findet, den der Betrag des Restglieds  $|R_n(x)|$  annehmen kann. Dafür bietet sich eine einfache Umformung an:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

Nun gilt es den Wert für  $x$  im definierten Intervall zu finden, für den das Restglied maximal groß wird. Ist dieser gefunden, setzt man ihn für  $x$  ein und sucht nun den Wert für  $\xi$ , für den das Restglied maximal groß wird.

Sobald man Werte für beide Variablen gefunden hat, lässt sich das Restglied

berechnen und man erhält die maximal mögliche Abweichung als absoluten Fehler.

Für eine Bewertung der Qualität der Approximation ist dieser aber nicht relevant, dafür wird der relative Fehler benötigt. Er ergibt sich aus dem Quotienten des absoluten Fehlers und des Funktionswertes an der berechneten Stelle  $x$ . [7]

## 4 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden wird die Anwendung der Taylorreihe exemplarisch dargestellt. Die ausgewählten Beispiele sind gewählt, um die Möglichkeiten, aber insbesondere auch die Grenzen dieser Reihenentwicklung aufzuzeigen.

### 4.1 Taylorentwicklung der Sinusfunktion

Recherchiert man zum Thema Taylorreihe, wird man unweigerlich auf die Approximation einer trigonometrischen Funktion als Beispiel stoßen. Selbst manche Taschenrechner berechnen sie über diesen Weg. [8] Daher wird auch an dieser Stelle mit dem Sinus und dem Kosinus als Beispiel begonnen.

Man betrachte die Funktion  $f(x) = \sin(x)$  und bestimme das Taylorpolynom 3. Ordnung ausgehend von der Stelle  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \\ &= \frac{f(0)}{0!} (x-0)^0 + \frac{f'(0)}{1!} (x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!} (x-0)^3 \end{aligned}$$

Nun werden die ersten drei Ableitungen am Entwicklungspunkt benötigt:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) = 0 \\ f'(0) &= \cos(0) = 1 \\ f''(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1 \end{aligned}$$

Eingesetzt und vereinfacht ergibt das:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \frac{0}{0!} (x-0)^0 + \frac{1}{1!} (x-0)^1 + \frac{0}{2!} (x-0)^2 + \frac{(-1)}{3!} (x-0)^3 \\ &= x - \frac{1}{6} x^3 \end{aligned}$$

Betrachtet man diese Approximation einmal graphisch, lässt sich ihre Brauchbarkeit in der unmittelbaren Umgebung von  $x_0$  schnell erkennen. Eine komplexere Untersuchung einer Approximation wird im nächsten Kapitel erfolgen.

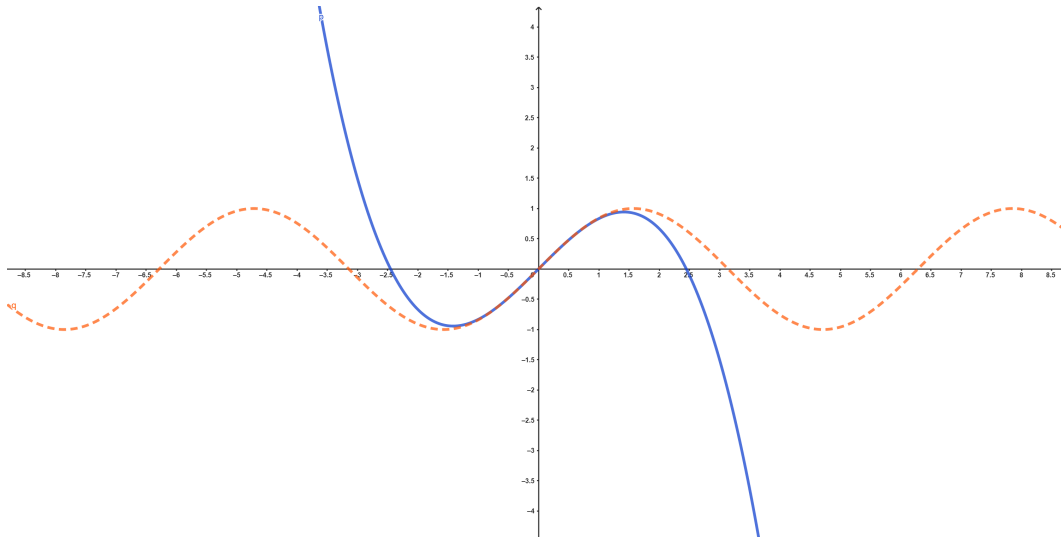


Abbildung 2:  $T_3$  von  $\sin(x)$  mit  $x_0 = 0$

## 4.2 Taylorentwicklung der Kosinusfunktion

Analog zum Kapitel 4.1 wird nun das Taylorpolynom 8. Ordnung der Entwicklungsstelle  $x_0 = \pi$  gebildet:

$$T_8(x) = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{-1}{24}(x - \pi)^4 + \frac{1}{720}(x - \pi)^6 + \frac{-1}{40320}(x - \pi)^8$$

Vergleicht man dieses Polynom mit dem Polynom der Sinusfunktion, stellt man fest, dass an den jeweiligen Stellen für den Sinus nur ungerade Exponenten und für den Kosinus nur gerade entstehen. Dies lässt sich damit erklären, dass die optimalste Approximation einer punktsymmetrischen Funktion, wie der Sinusfunktion, ebenfalls punktsymmetrisch sein muss. Gleiches gilt für die achsensymmetrische Kosinusfunktion.

Somit lässt sich der pauschale Satz aus Kapitel 3.2 Herleitung der Taylorreihe, dass jedes weitere Glied die Approximation erweitert, einschränken.

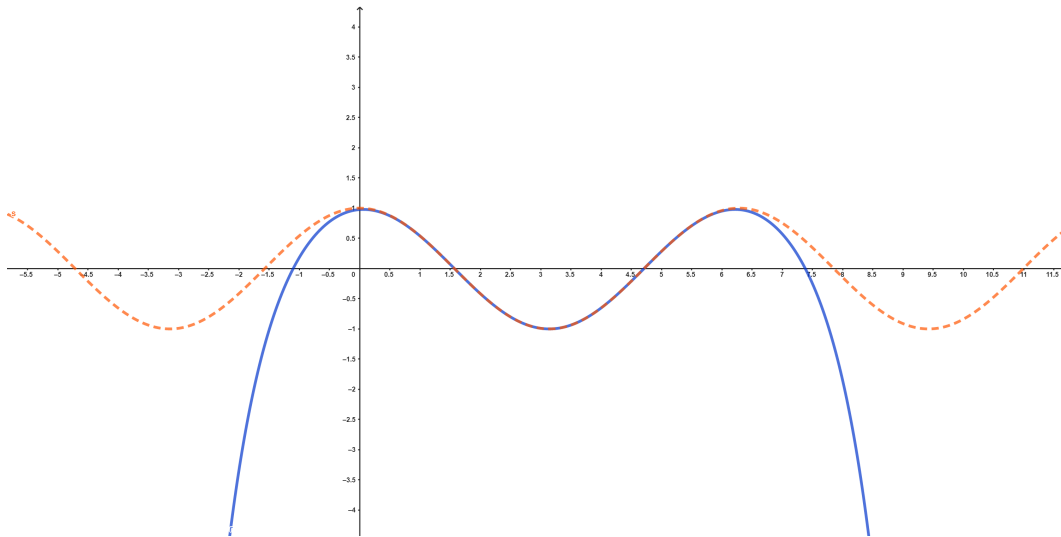


Abbildung 3:  $T_0$  von  $\cos(x)$  mit  $x_0 = \pi$

#### 4.2.1 Konvergenzradius der Kosinusfunktion

Zur Berechnung des Konvergenzradius' verwendet man das Quotientenkriterium mit

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

und betrachtet die einzelnen Glieder des zugehörigen Taylorpolynoms. Für die Kosinusfunktion lassen sich die einzelnen Glieder durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$$

ausdrücken. Diese Darstellung entwickelt man, indem man die einzelnen Ableitungen untersucht und über die Ableitungsregeln einen Zusammenhang herstellt. Im Kapitel 4.4.1 Konvergenzradius einer gebrochenrationalen Funktion wird die Entwicklung dieser Darstellung exemplarisch dargestellt.

Eingesetzt in das Quotientenkriterium ergibt das:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}}{\frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}} \right|$$

Zur Berechnung wird der Doppelbruch zuerst als Produkt geschrieben, ausmultipliziert und die Faktoren werden sinnvoll sortiert:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot x^{2n} \cdot (2n+2)!}{(-1)^{n+1} \cdot x^{2n+2} \cdot (2n)!} \right|$$

Da der Grenzwert des Betrags berechnet wird und dieser dafür auch auf einzelne Faktoren anwendbar ist, wird das Ergebnis von  $|(-1)^n|$  sowie  $|(-1)^{n+1}|$  immer 1 ergeben und diese beiden Werte dürfen gestrichen werden.

Die Fakultät  $(2n+2)!$  wird als  $(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)$  dargestellt:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n} \cdot (2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}{x^{2n+2} \cdot (2n)!} \right|$$

Durch weiteres Kürzen wird folgender Term erreicht:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{x^2} \right|$$

Lässt man nun  $n$  gegen unendlich laufen, läuft der gesamte Term auch gegen unendlich. Der endliche Wert im Nenner wird immer kleiner sein als der unendliche Wert im Zähler und somit gilt:

$$r = \infty$$

Diese Berechnung zeigt nun, dass die Kosinusfunktion an jeder Stelle durch eine Taylorreihe approximiert werden kann.

#### 4.2.2 Restgliedabschätzung der Kosinusfunktion

Auch wenn im vorherigen Kapitel bewiesen wurde, dass die Taylorreihe die Kosinusfunktion vollständig approximieren kann, das Taylorpolynom 8. Ordnung aus Kapitel 3 kann es definitiv nicht.

In diesem Kapitel wird der maximal mögliche Fehler berechnet, der entstehen kann, wenn man  $T_8$  im Intervall von  $[1; 2\pi]$  als Approximation verwenden möchte.

Dazu wird das Lagrangesche Restglied

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

aus Kapitel 3.4 verwendet und die entsprechenden Werte für  $R_8(x)$  eingesetzt:

$$|R_8(x)| = \frac{|f^{(8+1)}(\xi)|}{(8+1)!} \cdot |x - \pi|^{8+1} = \frac{|-\sin(\xi)|}{9!} \cdot |x - \pi|^9$$

Nun gilt es den Wert für  $x$  zu finden, für den der Term maximal groß wird. Da der Graph um  $\pi$  verschoben wurde, ist  $[\pi; 3\pi]$  das mögliche Intervall, in dem  $x$  liegen kann.

Da  $|x|^9$  im entsprechenden Intervall stetig steigend ist, erreicht der Term den größten möglichen Wert für  $x \in [\pi; 3\pi]$  mit  $x = 3\pi$ , also direkt an der rechten

Grenze des Intervalls.

Da über  $\xi$  nur bekannt ist, dass es zwischen  $x$  und  $x_0$  liegt, wird der Wert für  $\xi \in [\pi; 3\pi]$  gesucht, für den der Term mit  $x = 3\pi$  maximal groß wird. Betrachtet man den Verlauf von  $|\sin(x)|$ , ist dies für  $\xi = \frac{3}{2}\pi$  erreicht. Setzt man nun für  $x = 3\pi$  und  $\xi = \frac{3}{2}\pi$  ein, lässt sich der absolute Fehler berechnen:

$$|R_n(x)| = \frac{|\sin(\frac{3}{2}\pi)|}{9!} \cdot |3\pi - \pi|^9 = \frac{1}{9!} \cdot (2\pi)^9 \approx 42,0587$$

Da dieser aber recht aussagegelos ist, wird der relative Fehler benötigt, indem man den Funktionswert der Ursprungsfunktion an der Stelle des größtmöglichen Fehlers durch den absoluten Fehler teilt:

$$\frac{\cos(2\pi)}{42,0587} \approx 2,3776\%$$

Mit einem maximal möglichen Fehler von ca. 2,3776% ist diese Approximation also recht exakt, in einem kleineren Intervall oder mit einem Polynom höherer Ordnung könnte man sie nochmals präzisieren.

### 4.3 Taylorentwicklung der e-Funktion

Ein besonders interessanter Anwendungsfall für die Taylorreihe liegt mit der e-Funktion vor, da sie selbst an jeder Stelle ihre Ableitung darstellt, die Ableitung der e-Funktion ist also die e-Funktion selbst. Macht man sich diese Eigenart zunutze, erhält man ein spannendes Taylorpolynom, zum Beispiel dieses mit der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ :

$$T_5 = 1 + 1x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5$$

### 4.4 Taylorentwicklung einer gebrochenrationalen Funktion

Die Taylorentwicklung von  $\frac{1}{x}$  mit der Entwicklungsstelle  $x_0 = 1$  birgt auf den ersten Blick keine größeren Überraschungen, vergleicht man aber die Graphen (siehe Abb. 4) der Taylorpolynome  $T_{10}$  (in grün) und  $T_{20}$  (in blau), erscheint der Unterschied nur minimal, als würde die Approximation ab einem bestimmten Punkt keinen Fortschritt mehr machen können. Hier scheint ein endlicher Konvergenzradius vorzuliegen.

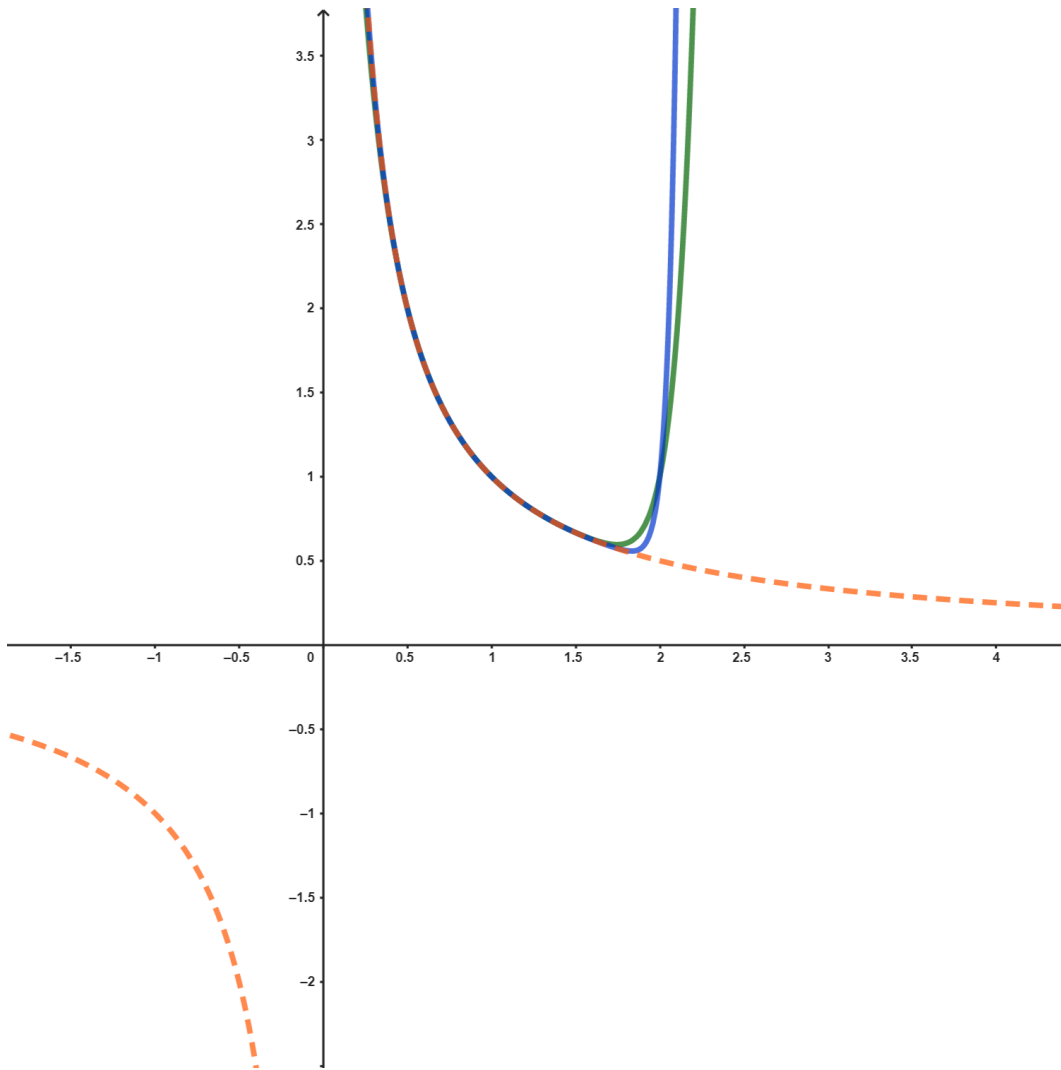


Abbildung 4:  $T_{10}$  und  $T_{20}$  von  $\frac{1}{x}$  mit  $x_0 = 1$

#### 4.4.1 Konvergenzradius einer gebrochenrationalen Funktion

Für diese Berechnung wird nun die Cauchy-Formel verwendet. Man beachte außerdem, dass nur positive Entwicklungsstellen  $x_0$  betrachtet werden. Die Cauchy-Formel sieht wie folgt aus:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

Um nun eine allgemeine Darstellung für jedes Glied  $a_k$  zu finden, schaut man sich die einzelnen Ableitungen an:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Die alternierenden Vorzeichen, der fakultative Zusammenhang im Zähler und die um eins steigenden Exponenten im Nenner lassen folgende allgemeine Be-

schreibung zu:

$$T_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \frac{k!}{x_0^{k+1}}}{k!}$$

Diesen Term gilt es nun zu kürzen, zuerst kürzt sich  $k!$ :

$$T_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x_0^{k+1}}$$

Nun kann man durch Potenzgesetze den Bruch auftrennen:

$$T_{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0}$$

Eingesetzt in die Cauchy-Formel ergibt das:

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0}\right|}}$$

Das Ziehen der  $k$ -ten Wurzel löst die Potenz mit dem Exponenten  $k$  auf. Der Grenzwert der  $k$ -ten Wurzel von  $\frac{1}{x_0}$  ergibt eins. Unter Anwendung des Betrags kommt dann folgender Term zustande:

$$r = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0$$

Das Bemerkenswerte an dieser Funktion ist also, dass der Konvergenzradius die Entwicklungsstelle selbst ist.

Damit lassen sich die Randpunkte des Konvergenzbereichs berechnen:

$$x_0 - x_0 = 0 \quad x_0 + x_0 = 2x_0$$

Diese Randpunkte gilt es nun auf Konvergenz zu prüfen, denn zum jetzigen Zeitpunkt kann darüber noch keine Aussage getroffen werden.

Darum werden zunächst die Werte für  $x$  eingesetzt. Für  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} T_{\infty} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \cdot (0 - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \cdot (-x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0} \cdot (-x_0)\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (1)^k \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Durch die Potenz wird die eins unendlich oft aufsummiert, hier liegt also Divergenz vor. Für  $x = 2x_0$ :

$$\begin{aligned} T_{\infty} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \cdot (2x_0 - x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0}\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \cdot (x_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{x_0} \cdot (x_0)\right)^k \cdot \frac{1}{x_0} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Potenz alterniert zwischen -1 und 1, somit gibt es zwei Häufungspunkte und auch für diesen Punkt divergiert die Reihe.

Somit ergibt sich der Konvergenzbereich  $]0; 2a[$  und betrachtet man die Graphen, erscheint dies plausibel.

## 4.5 Taylorreihen in der Praxis

Möchte man die Verformung eines Autos durch einen Unfall simulieren, die Kräfte untersuchen, denen ein Gebäude während eines Erdbebens standhalten muss oder die Belastung einer Brücke durch Verkehr und Witterungseinflüsse bestimmen, dann werden physikalische Modelle und ihre Funktionen so komplex, dass sie schwierig oder teils unmöglich zu lösen sind. Dann kommt die Approximation ins Spiel.

Und das nicht nur hier, in vielen naturwissenschaftlichen Bereichen findet sie Anwendung. Chemiker benötigen sie zum Beispiel zur Betrachtung von Partikeln oder Teilchen, Ingenieure und Physiker in Themenbereichen wie der Fließ-, Wärme- und Aerodynamik oder bei der Untersuchung elektrischer und magnetischer Felder und Mathematiker zum Lösen von Differenzialgleichungen. [9]

In all diesen Anwendungsbeispielen ist die Taylorreihe selten das einzige Werkzeug, das schnell und einfach eine Lösung liefert, dafür sind die Modelle häufig

zu komplex und die Berechnungen zu vielschichtig, dennoch wird sie oft als grundlegendes Instrument Anwendung finden und tatsächlich stehen auch viele weitere Methoden zur Approximation in Verbindung zur Taylorreihe, was ihre Bedeutsamkeit für die Analysis unterstreicht.

## 4.6 Taylorreihen als Unterrichtsinhalt

Noch vor einigen Jahren wurde die Kenntnis über Taylorreihen für die Abiturprüfung im Fach Mathematik vorausgesetzt, wie die thematischen Schwerpunkte im Bereich Mathematik aus dem Jahr 2009 belegen.[10] Wirft man nun einen Blick auf die aktuellen Bildungsstandards für das Fach Mathematik, [11] werden Reihen und damit auch die Taylorreihe nicht einmal erwähnt.

Dabei wird der Leser im Verlauf der Arbeit erkannt haben, wie vielseitig die Anwendungsmöglichkeiten von Taylorreihen sind. Sie ist ein grundlegendes und bedeutendes Werkzeug der Analysis und dabei zwar komplex, aber dennoch anschaulich und verständlich. Bedenkt man außerdem, dass sie beinahe in jedem naturwissenschaftlichen Studium Anwendung finden wird, ist es doch höchst verwunderlich, dass ein so sinnvolles und gerade auch für Schülerinnen und Schüler interessantes Thema vom Lehrplan gestrichen wurde.

Auch wenn Schülerinnen und Schüler in der Oberstufe in der Regel die Taylorreihe noch nicht kennenlernen, wird sie ihnen vermutlich in verschiedenen naturwissenschaftlichen Studiengängen Freude bereiten.

## 5 Anhang

### Literatur

- [1] H. K. Strick, *Brook Taylor (1685-1731)*, [Online; Stand 19. März 2023], 2015. Adresse: <https://www.spektrum.de/wissen/brook-taylor-englischer-mathematiker-pionier-der-differenzial-und-integralrechnung/1354083>.
- [2] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis ; Teil 1 Mit 780 Aufgaben, zum Teil mit Lösungen*, ger, 1988.
- [3] M. Bergmann, *Schülerduden Mathematik:[ein Lexikon zur Schulmathematik]. 2.[Ein Lexikon zur Schulmathematik für das 11. bis 13. Schuljahr]:[die Grundlagen von Analysis, analytischer Geometrie und Stochastik; Abiturwissen zum gezielten Nachschlagen und Wiederholen]*, 3., neu bearb. und erw. Aufl. - 1991. Dudenverl., 2004.
- [4] Wikipedia, *Approximation — Wikipedia, die freie Enzyklopädie*, [Online; Stand 19. März 2023], 2022. Adresse: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Approximation&oldid=224262758>.
- [5] J. Raddy, *Taylorpolynome Josef Raddy*, [Online; Stand 19. März 2023], 2014. Adresse: [https://www.informatik.uni-kiel.de/~tdu/tutorium2016-mathec/taylorpolynome\\_josef\\_raddy.pdf](https://www.informatik.uni-kiel.de/~tdu/tutorium2016-mathec/taylorpolynome_josef_raddy.pdf).
- [6] D. K. R. Prof. Dr. Timo Reis, *Analysis II für Studierende der Ingenieurwissenschaften*, [Online; Stand 19. März 2023; Lehrexport TUHH], 2015. Adresse: [https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/vorlesungen/vl2\\_dv.pdf](https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a2/15/vorlesungen/vl2_dv.pdf).
- [7] P. D. M. Stroppel, *Material HM 2 Universität Stuttgart*, [Online; Stand 19. März 2023], 2006. Adresse: [http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/HTML-Ana/2-06.html#:~:text=Definition.&text=das%5C%20Taylorpolynom%5C%20der%5C%20Stufe%5C%20um%5C%20den%5C%20Entwicklungspunkt%5C%20.&text=wird%5C%20als%5C%20Restglied%5C%20nach%5C%20Lagrange,x%5C%20%5C%20x%5C%200%5C%20\)%5C%20verwendet..](http://info.mathematik.uni-stuttgart.de/HM-Stroppel-Material/HTML-Ana/2-06.html#:~:text=Definition.&text=das%5C%20Taylorpolynom%5C%20der%5C%20Stufe%5C%20um%5C%20den%5C%20Entwicklungspunkt%5C%20.&text=wird%5C%20als%5C%20Restglied%5C%20nach%5C%20Lagrange,x%5C%20%5C%20%5C%20x%5C%200%5C%20)%5C%20verwendet..)
- [8] J. H. Müller, »Wie berechnet der Taschenrechner eigentlich Sinus-Werte?« In *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 1: ISTRON-Schriftenreihe*, H.-W. Henn und J. Meyer, Hrsg. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014, S. 85–98, [Online; Stand 19. März 2023], ISBN: 978-3-658-03628-7. DOI: 10.1007/978-3-658-03628-7\_7. Adresse: [https://doi.org/10.1007/978-3-658-03628-7\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-658-03628-7_7).

- [9] W.-C. Xie, *Differential equations for engineers*. Cambridge university press, 2010, [Online; Stand 19. März 2023].
- [10] N. Kultusministerium, *Abitur 2009 – Thematische Schwerpunkte Mathematik*, [Online; Stand 19. März 2023], September 2008.
- [11] S. der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*, [Online; Stand 19. März 2023], 2012.

## Abbildungsverzeichnis

|   |                                                                 |    |
|---|-----------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Porträt von Brook Taylor . . . . .                              | 1  |
| 2 | $T_3$ von $\sin(x)$ mit $x_0 = 0$ . . . . .                     | 8  |
| 3 | $T_0$ von $\cos(x)$ mit $x_0 = \pi$ . . . . .                   | 9  |
| 4 | $T_{10}$ und $T_{20}$ von $\frac{1}{x}$ mit $x_0 = 1$ . . . . . | 12 |

Quelle Abbildung 1:

<https://galileo-unbound.blog/2020/08/03/brook-taylors-infinite-series/>

# Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 19. März 2023

---

Jarne Seibt

# Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 19. März 2023

---

Jarne Seibt