

Matrizen- ein Werkzeug zur Untersuchung stochastischer Prozesse

Im Kurs sf48

Gliederung

- ▶ Bedeutung der stochastischen Prozesse
- ▶ Grundlagen
- ▶ Markow-Ketten
- ▶ Grenzwertuntersuchungen
- ▶ Fazit

Bedeutung der stochastischen Prozesse

- ▶ Thema, welches 2019 aus dem Kerncurriculum der gymnasialen Oberstufe gestrichen wurde
- ▶ Stochastische Vorgänge bilden die Basis für die Wahrscheinlichkeitstheorie
- ▶ Möglichkeit, diese mit Matrizen darzustellen und untersuchen

Begriffserklärungen

- ▶ Einheitsmatrix:
 - ▶ Elemente der Hauptdiagonale ist 1, der Rest 0
- ▶ Stochastische Matrix:
 - ▶ Quadratische Matrix
 - ▶ Spaltensumme ist immer Eins

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grundlagen von Matrizen

Multiplikation:

► $A * B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$

-“jede Zeile mal Spalte“

-nicht kommutativ

Potenzieren:

-Multiplikation mit sich selbst

- A^n

Grundlagen von Matrizen

► Division:

-mathematisch nicht genau definiert

Bildung einer Inversen (Kehrwert)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

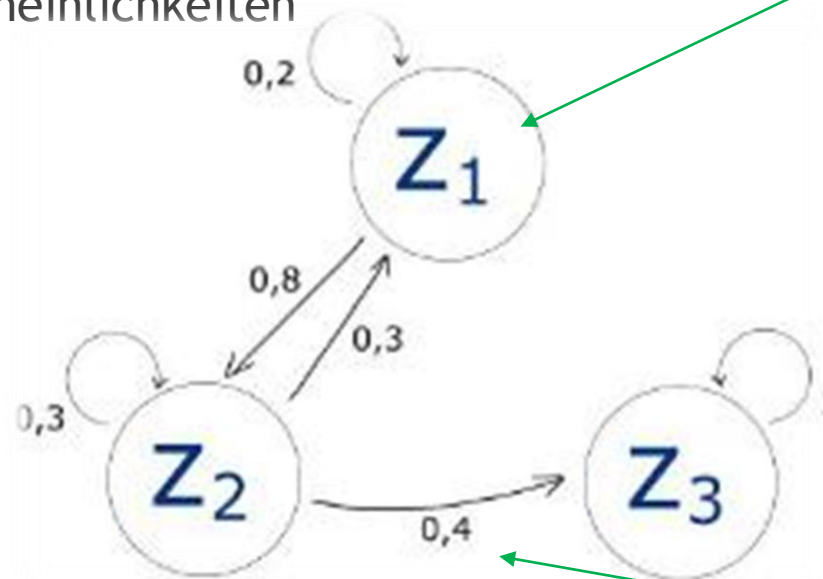
Diese neue Matrix als Gleichungssystem lösen.

Diese neue Matrix kann mit der anderen Matrix multipliziert werden.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

Markow-Ketten

- ▶ Endliche Menge an Zuständen
- ▶ Konstante Übergangswahrscheinlichkeiten
- ▶ Beispiel:
- ▶ Es gibt Startverteilung $\vec{v}$

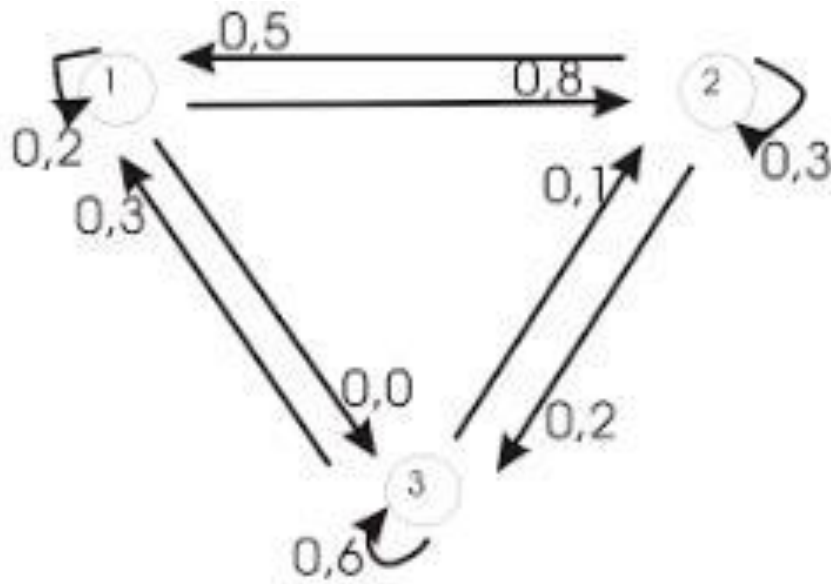


Zustand

Übergangswahrscheinlichkeit

Prozessdiagramme in Matrizen umwandeln

- Prozessdiagramme sind oft schwer zu lesen



$$A = \begin{pmatrix} 0 & A & B & C \\ A & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ B & 0,8 & 0,3 & 0,1 \\ C & 0,0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Berechnung von Zustandsverteilungen nach bestimmten Durchläufen

- ▶ Allgemein: Rekursive Formel

- ▶ $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}$

- ▶ $\rightarrow A_n = 0,3 * A_{n-1} + 0,4 * B_{n-1}$

- ▶ $\rightarrow B_n = 0,7 * A_{n-1} + 0,6 * B_{n-1}$

- ▶ Folglich: Für geringe Anzahl an Durchläufen noch einfach zu berechnen, für viele Durchläufe viel zu aufwändig
- ▶ $\rightarrow$ Lösung: Potenzierung von Matrizen

Berechnung von Zustandsverteilungen nach bestimmten Durchläufen

- ▶ Potenzierung der Matrix um n Durchläufen A^n
- ▶ A^n wird mit Startverteilung multipliziert, Ergebnis ist Verteilung nach n Durchläufen

- ▶ $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,7 & 0,6 \end{pmatrix} \quad A^{10} = \begin{pmatrix} 0,364 & 0,364 \\ 0,636 & 0,636 \end{pmatrix}$

- ▶ Verteilung nach 10 Durchläufen:

$$\vec{v}_{10} = \begin{pmatrix} 0,364 & 0,364 \\ 0,636 & 0,636 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

->deutlich einfacher und übersichtlicher zu berechnen, besonders für viele Durchläufe, zudem nicht so fehleranfällig

Grenzwertuntersuchungen

- ▶ Frage wichtig, wie sich stochastische Vorgänge bei $n \rightarrow \infty$ verhalten
- ▶ Es werden mit einer neuer Matrix verschiedene Zustandsverteilungen berechnet.

$$A_n = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,8 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Anzahl an Durchläufen	Zustand A	Zustand B	Zustand C
0	100	0	0
1	30	30	40
2	50	19	31
3	45,5	21,9	32,6
4	46,3	21,29	32,41
8	46,206	21,379	32,414
9	46,207	21,379	32,414
10	46,207	21,379	32,414
11	46,207	21,379	32,414
100	46,207	21,379	32,414

- ▶ Zustandsverteilung verändert sich kaum mehr-> nähert sich Grenzvektor an

Grenzwertuntersuchungen

Zwischenfazit:

- ▶ Der Grenzvektor ist die Zustandsverteilung, die bei $n \rightarrow \infty$ entsteht.
- ▶ Die Grenzmatrix gibt die dazugehörige Matrix bei A^n bei $n \rightarrow \infty$ an.
- ▶ Der Grenzvektor ist unabhängig von der Startverteilung

Grenzwertuntersuchungen

Verallgemeinerung:

->Nutzung von Eigenvektoren und Eigenwerten

Eigenwert λ gibt an, wie sich die Matrix für den Grenzzustand verhält

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = b_{11} * b_{22} - b_{21} * b_{12}$$

Diese Gleichung ist eine quadratische Funktion, von der nun die Nullstellen berechnet werden kann.

->2 Nullstellen sind die Eigenwerte, genannt λ_1 und λ_2

Bedeutung der Eigenwerten

- ▶ Beide Eigenwerte kleiner als Eins, so zerfällt (konvergiert) der Prozess gegen Null.
- ▶ Ein Eigenwert ist Eins, der andere kleiner als Eins, so konvergiert der Prozess.
- ▶ Ein Eigenwert größer als Eins, so wächst der Prozess beliebig an.

Beispiel für Eigenvektoren

- ▶ $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}$
- ▶ $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 - \lambda & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 - \lambda \end{pmatrix}$
- ▶ $\det(A) = (0,4 - \lambda) * (0,1 - \lambda) - 0,6 * 0,9 = \lambda^2 - 0,5 * \lambda - 0,5$
- ▶ $\lambda^2 - 0,5 * \lambda - 0,5 = 0$
- ▶ $\Leftrightarrow \lambda = -0,5 \vee \lambda = 1$

Test:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,9 \\ 0,6 & 0,1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 0,600 & 0,599 \\ 0,400 & 0,401 \end{pmatrix}; A^{100} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Fazit

- ▶ Durch Nutzung von Matrizen Möglichkeit, stochastische Vorgänge
 - ▶ darzustellen und
 - ▶ zu berechnen.
- ▶ Frage, ob es sinnvoll war, dieses Thema aus dem Kerncurriculum zu streichen