



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Sphärische Geometrie und ihre Anwendungen in der Navigation

Hannah Kromminga

NOTE: _____

PUNKTZAHL: _____

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

5. Juni 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	2
2	Vergleich der euklidischen mit der sphärischen Geometrie	3
2.1	Euklidische Geometrie	3
2.2	Vergleich mit der sphärischen Geometrie	3
3	Sphärische Geometrie	4
3.1	Haupt- und Nebenkreise sowie sphärische Distanz	4
3.2	Das sphärische Zweieck	5
3.3	Das sphärische Dreieck	6
3.3.1	Flächeninhalt	6
3.3.2	Winkelsumme und sphärischer Exzess	8
3.4	Sphärische Trigonometrie	8
3.4.1	Das rechtwinklige sphärische Dreieck	8
3.4.2	Napiersche Regel	10
3.4.3	Das schiefwinklige sphärische Dreieck	10
4	Anwendungen in der Navigation	12
4.1	Gestalt und Gradnetz der Erde	12
4.2	Kursberechnungen	13
4.2.1	Orthodromer Kurs	13
4.3	Abituraufgabe von Wilhelm Terwey	13
4.3.1	Historische Einordnung	13
4.3.2	Berechnung der Flugdauer und des Startkurses	14
4.3.3	Berechnung des Sonnenaufgangs	15
I	Anhang	17
	Literatur	17
	Abbildungsverzeichnis	18

1 Vorwort

Die sphärische Geometrie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Berechnungen auf der Kugel befasst. Da die Gestalt der Erde annähernd einer Kugel entspricht, findet die sphärische Geometrie neben der Geographie und Geodäsie auch in der Navigation Anwendung. Weil die Schnittmenge zwischen den Gebieten Kugelgeometrie und Navigation sehr groß ist, werden einige gemeinsame Teilgebiete, wie zum Beispiel die Astronomie, in dieser Facharbeit ausgelassen. Um an das aus der Schulmathematik bekannte Vorwissen anzuknüpfen, wird zunächst ein Vergleich mit der euklidischen Geometrie vorgenommen. Als Anwendungsbeispiel soll am Ende eine Abituraufgabe aus dem Jahr 1944 dienen.

2 Vergleich der euklidischen mit der sphärischen Geometrie

2.1 Euklidische Geometrie

Im 3. Jahrhundert vor Christus entwickelte Euklid von Alexandria eine axiomatische Grundlegung der Geometrie. Diese besteht aus 35 Definitionen, 5 Postulaten sowie 5 Axiomen. Im Folgenden sind die Postulate, welche die euklidische Geometrie definieren, in moderner Formulierung dargestellt:

1. Je zwei Punkte können durch eine Strecke verbunden werden.
2. Die Verlängerung einer Strecke ist eine Gerade.
3. Um einen beliebigen Mittelpunkt kann ein Kreis mit einem beliebigen Radius konstruiert werden.
4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Wenn bei einer Geraden, die zwei andere Geraden schneidet, die Summe der beiden Innenwinkel (Nachbarwinkel) an der gleichen Seite kleiner ist als die Summe von zwei rechten Winkeln, so werden sich die beiden Geraden auf der Seite schneiden, an der sich diese beiden Winkel befinden. Oder anders: Zu einer Gerade gibt es durch einen beliebigen Punkt P eine Parallele.

Der ursprüngliche Aufbau der euklidischen Axiologie, vor allem bezüglich der Einteilung in Definitionen, Postulate und Axiome, ist aus heutiger Sicht nicht logisch korrekt. Inhaltlich werden die ersten vier Postulate aber von Mathematikern der Neuzeit akzeptiert. Lange Zeit war jedoch umstritten, ob das 5. Postulat, welches als Parallelenpostulat bekannt ist, durch die anderen Postulate und Axiome bewiesen werden kann. Im 19. Jahrhundert wurde das sogenannte Parallelenproblem dann gelöst, obgleich nicht wie erwartet durch einen Beweis des 5. Postulats, sondern durch die Erkenntnis, dass auch eine Verneinung des Parallelenpostulats eine widerspruchsfreie Theorie ergibt. Somit gibt es heute neben der euklidischen Geometrie, in der alle fünf Postulate gelten, andere, nichteuklidische Geometrieformen, in denen das 5. Postulat ungültig ist. So gibt es zum Beispiel in der hyperbolischen Geometrie durch einen beliebigen Punkt nicht eine, sondern unendlich viele Parallelen zu einer Geraden.

2.2 Vergleich mit der sphärischen Geometrie

Einige für die euklidische Geometrie definierten Begriffe werden in ähnlicher Form auch in der sphärischen verwendet. Analog zur Gerade und Strecke in

der euklidischen Geometrie gibt es auf der Kugel sogenannte Hauptkreise, also Kreise, deren Umfang dem der Kugel entspricht, und Hauptkreisbögen. Die Begriffe „Gerade“ und „Hauptkreis“ sind jedoch nicht gleichzusetzen. Im Folgenden werden die in Meyers Rechenduden[1] festgelegten Eigenschaften einer Gerade mit denen eines Hauptkreises verglichen.

1. „Eine Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig bestimmt.“

Hauptkreise können nur dann eindeutig durch zwei Punkte bestimmt werden, wenn diese Punkte keine Gegenpunkte sind. Gegenpunkte, also zwei Punkte auf der Kugeloberfläche, deren Verbindungsstrecke durch den Kugelmittelpunkt verläuft, können hingegen durch unendlich viele Hauptkreise verbunden werden.

2. „Liegen drei Punkte auf einer Geraden, so kann man genau von einem der drei Punkte sagen, daß er zwischen den beiden anderen liegt.“

Auf einem Hauptkreis kann aus trivialen Gründen nicht gesagt werden, welcher von drei Punkten zwischen den anderen liegt.

3. „Eine Gerade wird durch einen Punkt in zwei Teile zerlegt“

Auch das trifft nicht auf einen Hauptkreis zu, da dieser nicht durch einen, sondern zwei Punkte in zwei Teile, also Hauptkreisbögen, unterteilt wird.

4. „Eine Gerade ist nach zwei Richtungen unbegrenzt.“

Dies gilt auch für alle Hauptkreise. Diese sind zwar nicht von unendlicher Länge (ihre Länge entspricht dem Kugelumfang), aber dennoch unbegrenzt.

5. „Zwei Geraden, die in ein und derselben Ebene liegen, haben entweder einen Punkt (Schnittpunkt) gemeinsam oder gar keinen, im letzteren Fall heißen sie parallel.“

Wie bereits erwähnt, gilt das Parallelenaxiom nur in der euklidischen, nicht aber in der sphärischen Geometrie. Tatsächlich haben zwei Hauptkreise immer genau zwei Schnittpunkte, können also nicht parallel zueinander sein. Diese Schnittpunkte sind Gegenpunkte.

3 Sphärische Geometrie

3.1 Haupt- und Nebenkreise sowie sphärische Distanz

Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, entsteht als Schnittlinie ein Kreis. Entspricht der Mittelpunkt dieses Kreises dem der Kugel, so heißt der Kreis Hauptkreis. Ansonsten handelt es sich um einen Nebenkreis.

Hauptkreisbögen haben denselben Radius wie die Kugel selbst und stellen die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten dar.

Auf der Kugeloberfläche erfolgt die kürzeste Verbindung zweier Punkte A und B , die nicht Gegenpunkte sind, durch den kürzeren Bogen des Hauptkreises, den die beiden Punkte eindeutig bestimmen. Dieser Kreisbogen ist als sphärische Distanz definiert und wird als Bogenmaß des Mittenwinkels $\sphericalangle AMB$ angegeben. Da der Radius eines Nebenkreises stets kleiner ist als der eines Hauptkreises, muss der Kreisbogen eines Nebenkreises über die Sehne $\overline{AB}$ länger sein als die sphärische Distanz der beiden Punkte.

Zwei Gegenpunkte können nicht durch Nebenkreise verbunden werden. Jeder beliebige Hauptkreis wird durch zwei diametral liegende Punkte in zwei gleich große Hauptkreisbögen geteilt. Die sphärische Distanz zweier Gegenpunkte beträgt daher πr .

3.2 Das sphärische Zweieck

In der euklidischen Geometrie ist es nicht möglich, eine Figur mit zwei Seiten und zwei Ecken zu konstruieren, da sich zwei Geraden nicht in mehr als einem Punkt schneiden können. In der sphärischen Geometrie hingegen gibt es sogenannte Zweiecke, da sich zwei Hauptkreise immer in zwei Punkten schneiden. Da diese Schnittpunkte Gegenpunkte sind, teilen sich zwei Hauptkreise gegenseitig in je zwei gleich lange Kreisbögen der Länge πr . Die Seitenlängen eines Zweiecks betragen also jeweils den halben Kugelumfang. Durch zwei Hauptkreise wird die Kugeloberfläche in vier Kugelzweiecke eingeteilt.

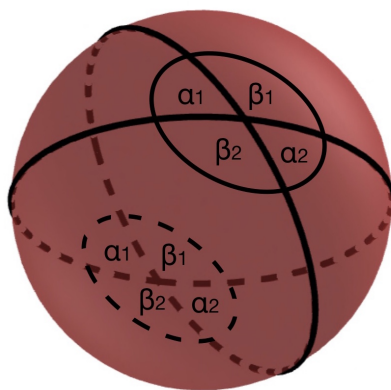


Abbildung 1: Kugelzweiecke

Der Schnittwinkel zweier Hauptkreise ist definiert als Diederwinkel zwischen den Ebenen der Kreise. Da beide Innenwinkel eines Zweiecks durch den selben Schnittwinkel der Ebenen bestimmt werden, sind sie zueinander gleich.

Desweiteren sind die Innenwinkel α_1 und α_2 zweier gegenüberliegender Zweiecke Scheitelwinkel und demnach gleich. Ebenso sind β_1 und β_2 zueinander gleich.

Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks mit der Größe δ eines Innenwinkels wird durch $A_Z = \frac{\delta}{360^\circ} \cdot 4\pi r^2 = \frac{\delta}{90^\circ} \cdot \pi r^2$ berechnet, entspricht also $\frac{\delta}{360^\circ}$ des Kugeloberflächeninhalts. Auf einer Kugel mit einem festen Radius r ist der Flächeninhalt eines Zweiecks demnach nur von der Innenwinkelgröße δ abhängig. Es kann also keine ähnlichen Zweiecke geben. Gegenüberliegende Zweiecke haben gleiche Winkel und somit auch den gleichen Flächeninhalt, sind also immer kongruent.

3.3 Das sphärische Dreieck

Drei Hauptkreise, die sich nicht im selben Punkt schneiden, bilden 8 Eulersche Dreiecke. Das sind sphärische Dreiecke, deren sämtliche Seiten und Winkel kleiner als π sind. Im Folgenden werden die Begriffe „Kugeldreieck“ oder „sphärisches Dreieck“ auf Eulersche Dreiecke beschränkt.

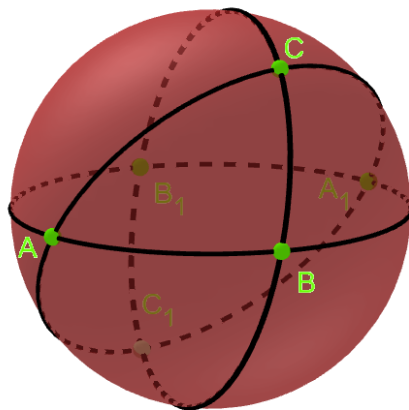


Abbildung 2: Eulersche Dreiecke

Zu einem Dreieck ABC gibt es

- ein aus den Gegenpunkten der Eckpunkte gebildetes Gegendreieck $A_1B_1C_1$,
- drei Nebendreiecke BCA_1 , ACB_1 und ABC_1 , die jeweils eine Seite mit ABC gemeinsam haben,
- sowie drei Scheiteldreiecke AB_1C_1 , BA_1C_1 und CA_1B_1 .

3.3.1 Flächeninhalt

Zwei Kugeldreiecke mit einer gemeinsamen Seite ergänzen sich immer zu einem Kugelzweieck mit dem Flächeninhalt A_Z .

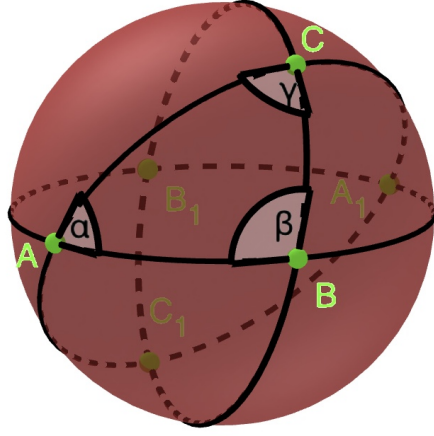


Abbildung 3: ABC mit den benachbarten Dreiecken BCA_1 , AB_1C und ABC_1

Daher gilt:

$$\begin{aligned} F_{ABC} + F_{BCA_1} &= \frac{\alpha}{90^\circ} \pi r^2 \\ F_{ABC} + F_{AB_1C} &= \frac{\beta}{90^\circ} \pi r^2 \\ F_{ABC} + F_{ABC_1} &= \frac{\gamma}{90^\circ} \pi r^2 \end{aligned}$$

Da Dreieck und Gegendreieck denselben Flächeninhalt haben[3], kann F_{ABC_1} durch $F_{A_1B_1C}$ ersetzt werden. Durch Addition der drei Gleichungen ergibt sich:

$$2 \cdot F_{ABC} + (F_{ABC} + F_{BCA_1} + F_{AB_1C} + F_{A_1B_1C}) = \frac{\pi \cdot r^2}{90^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$$

Die Dreiecke ABC , BCA_1 , AB_1C und A_1B_1C zusammen ergeben eine Halbkugel, sodass der in Klammern stehende Ausdruck in der obigen Gleichung durch die halbe Kugeloberfläche $2\pi r^2$ ersetzt werden kann. Durch Umformung erhält man eine Formel zur Berechnung der Dreiecksfläche F_{ABC} :

$$\begin{aligned} 2 \cdot F_{ABC} + 2\pi r^2 &= \frac{\pi \cdot r^2}{90^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) && | : 2 \\ F_{ABC} + \pi r^2 &= \frac{\pi \cdot r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) && | - \pi r^2 \\ F_{ABC} &= \frac{\pi \cdot r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2 \\ F_{ABC} &= \frac{\pi \cdot r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ) \end{aligned}$$

Wie beim sphärischen Zweieck ist also der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks von der Innenwinkelsumme abhängig. Folglich sind Kugeldreiecke mit übereinstimmenden Innenwinkeln immer kongruent. Ähnliche Kugeldreiecke gibt es hingegen nicht.

Außerdem soll noch gesagt sein, dass in sphärischen Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen und dass bei unterschiedlich großen Seiten der größeren von beiden auch der größere Winkel gegenüber liegt [3].

3.3.2 Winkelsumme und sphärischer Exzess

Der Winkelsummensatz der euklidischen Geometrie besagt, dass die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks 180° beträgt. Da dieser Winkelsummensatz sich auf das Parallelenpostulat stützt, gilt er in der sphärischen Geometrie nicht. Stattdessen gilt:

1. Die Innenwinkelsumme eines Kugeldreiecks ist größer als 180° .

Der Beweis ergibt sich aus $F_{ABC} = \frac{\pi \cdot r^2}{180^\circ} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ)$, da der Flächeninhalt eines Dreiecks immer positiv ist.

2. Die Innenwinkelsumme eines Kugeldreiecks ist kleiner als 540° .

Das folgt aus der Bedingung, dass alle Innenwinkel eines Eulerschen Dreiecks kleiner als 180° sind..

Der Ausdruck $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$ wird als sphärischer Exzess ε bezeichnet.

3.4 Sphärische Trigonometrie

3.4.1 Das rechtwinklige sphärische Dreieck

Als rechtwinklig bezeichnet man ein Kugeldreieck mit (mindestens) einem rechten Winkel. Analog zur ebenen Geometrie wird die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als Hypotenuse bezeichnet und die diesen Winkel einschließenden Seiten nennt man Katheten.

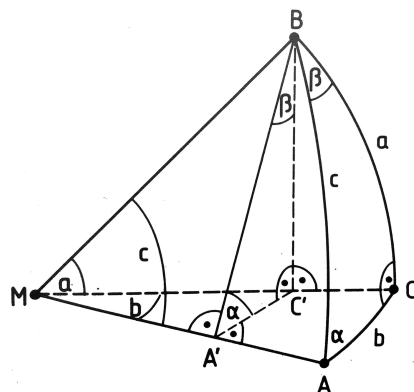


Abbildung 4: Darstellung eines Dreikants in *Astronomische Navigation* [3] (S.6)

Um die trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck herzuleiten, betrachten wir das Dreikant eines Kugeldreiecks mit den Seiten a , b und

c sowie den Innenwinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$. Ein Dreikant wird konstruiert, indem drei Strahlen vom Kugelmittelpunkt M durch jeweils eine Ecke A , B oder C des Kugeldreiecks gelegt werden. Der Winkel zwischen zwei Strahlen entspricht also dem Hauptkreisbogen zwischen ihren Schnittpunkten mit der Kugeloberfläche. Je zwei Strahlen bilden eine Ebene. Alle drei Ebenen werden von der Kugeloberfläche geschnitten, sodass ein Dreikant entsteht. Legt man nun eine Ebene so, dass sie die Ebene MAC und den Strahl MC senkrecht schneidet, entstehen die ebenen Dreiecke $A'BC'$ mit rechtem Winkel bei C' , MBC' mit rechtem Winkel bei C' , $C'A'M$ mit rechtem Winkel bei A' und $MB'A'$ mit rechtem Winkel bei A' . Selbstverständlich gelten für diese Dreiecke die aus der ebenen Geometrie bekannten trigonometrischen Formeln. Im Dreieck $A'BC'$ ist $\sin(\alpha) = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}$. Da $\overline{BC'}$ in den Dreiecken MBC' und $MB'A'$ jeweils die Gegenkathete zum Winkel a beziehungsweise c ist, gilt außerdem $\overline{BC'} = \overline{MB} \cdot \sin(a)$ und $\overline{BA'} = \overline{MB} \cdot \sin(c)$, sodass

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{MB} \cdot \sin(a)}{\overline{MB} \cdot \sin(c)} = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}. \quad (1)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich folgende Formeln herleiten:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{MA'} \cdot \tan(b)}{\overline{MA'} \cdot \tan(c)} = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} \quad (2)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{MC'} \cdot \tan(a)}{\overline{MC'} \cdot \sin(b)} = \frac{\tan(a)}{\sin(b)} \quad (3)$$

Analog gilt für β :

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)} \quad (4)$$

$$\cos(\beta) = \frac{\tan(a)}{\tan(c)} \quad (5)$$

$$\tan(\beta) = \frac{\tan(b)}{\sin(a)} \quad (6)$$

Ferner lässt sich der „sphärische Satz des Pythagoras“ [5] herleiten, der folgendes besagt:

$$\cos(b) = \frac{\cos(c)}{\cos(a)} \Leftrightarrow \cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) \quad (7)$$

Durch geeignete Kombination und Vertauschung der Formeln (1) bis (7) folgt schließlich [5]:

$$\cos(\beta) = \cos(b) \cdot \sin(a) \quad (8)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(\beta) \quad (9)$$

$$\cos(c) = \cot(\alpha) \cdot \cot(\beta) \quad (10)$$

3.4.2 Napiersche Regel

Als Zusammenfassung dieser zehn Hauptbeziehungen dient folgende von John Napier entwickelte Merkmregel:

„Schreibt man die Stücke des Dreiecks nebeneinander auf einen Kreis, läßt den rechten Winkel fort und schreibt für die Katheten die Komplemente, so ist der Kosinus jedes Stückes gleich dem Produkt der Kotangenten der anliegenden Stücke und gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke.“[5]

Vorausgesetzt wird hierfür, dass a und b spitz sind. Ist dies nicht der Fall, muss ein geeignetes Nebendreieck verwendet werden, um die gesuchte Seite oder den gesuchten Winkel zu berechnen (vgl.[5]).

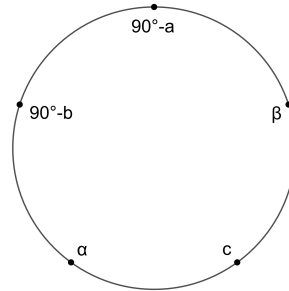


Abbildung 5:
Napierscher Kreis

3.4.3 Das schiefwinklige sphärische Dreieck

Legt man durch einen Eckpunkt C eines nicht rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC einen Großkreisbogen h , der die diesem Eckpunkt gegenüberliegende Seite c senkrecht im Punkt D schneidet, entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke CDB und ADC mit den jeweiligen Hypothenusen a und b .

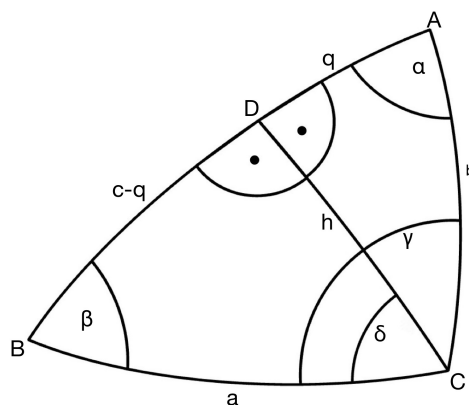


Abbildung 6: Schiefwinkliges Dreieck

Setzen wir nun die entsprechenden Seiten und Winkel der Dreiecke CDB und ADC in Formel (4) ein, so erhalten wir:

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(h)}{\sin(a)}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sin(h)}{\sin(b)}$$

Die Umstellung nach $\sin(h)$ und Gleichsetzung der beiden Formeln ergibt:

$$\sin(a) \cdot \sin(\beta) = \sin(b) \cdot \sin(\alpha) \quad | : (\sin(\beta) \cdot \sin(b))$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(a)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

Nimmt man eine andere sphärische Höhe h des Dreiecks ABC , also zum Beispiel eine Senkrechte zur Seite a durch den Punkt A , erhält man analog:

$$\frac{\sin(b)}{\sin(c)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich zum sphärischen Sinussatz zusammenfassen:

$$\sin(a) : \sin(b) : \sin(c) = \sin(\alpha) : \sin(\beta) : \sin(\gamma) \quad (11)$$

Im sphärischen Dreieck verhalten sich die Sinusse zweier Seiten wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel. Anwendung findet dieser Satz, wenn eine Seite und zwei Winkel, von denen einer der Seite gegenüberliegt, oder ein Winkel und zwei Seiten, von denen eine dem Winkel gegenüberliegt, bekannt sind.

Ohne Beweis sollen außerdem zwei weitere Sätze aufgeführt werden.
Seitenkosinussatz:

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) \quad (12)$$

Folglich durch Vertauschung:

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$$

Um den Seitenkosinussatz anzuwenden, müssen entweder zwei Seiten und der dazwischenliegende Winkel oder alle drei Seiten gegeben sein.

Winkelkosinussatz:

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a) \quad (13)$$

Folglich durch Vertauschung:

$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(b)$$

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

Um den Winkelkosinussatz anzuwenden, müssen entweder zwei Winkel und die dazwischenliegende Seite oder alle drei Winkel gegeben sein.

4 Anwendungen in der Navigation

4.1 Gestalt und Gradnetz der Erde

Genau genommen ist die Erde keine perfekte Kugel, sondern ähnelt eher einem Ellipsoid, da sie an den Polen abgeplattet ist. Für die meisten praktischen Anwendungen in der Navigation reicht es jedoch, die Erde als Kugel zu approximieren (vgl. [3] S.14), was im Folgenden getan wird. Die Erdkugel hat einen Radius von ungefähr $6367km$ [2] und dementsprechend einen Umfang von $2\pi \cdot 6367km \approx 40005km$. Ein Grad entspricht also einem Bogenstück der Länge $\frac{40005km}{360} \approx 111,2km$ und eine Bogenminute beträgt $\frac{111,2km}{60} \approx 1,852km$. Die Länge $1,852km$ einer Bogenminute wird als $1sm$, also eine Seemeile, definiert.

Das Gradnetz der Erde besteht aus Breiten- und Längengraden. Alle Längengrade sind Hauptkreise durch den Nord- und Südpol. Durch die Pole werden sie in zwei Halbkreise sogenannte Meridiane geteilt, die man Meridiane nennt. Als Bezugsmeridian der Länge 0° ist der durch Greenwich verlaufende Meridian festgelegt. Der einzige Breitengrad, der ein Hauptkreis ist, ist der Äquator. Alle anderen Breitengrade sind Nebenkreise, auf denen jeder Punkt denselben Abstand zum Äquator hat, und werden daher auch Breitenparallele genannt. Die Breite φ eines Punktes P auf der Erdoberfläche wird bestimmt durch den vom Erdmittelpunkt M aus gemessenen Winkel zwischen der Richtung MP und der Äquatorebene, kann also maximal 90° betragen. Je nachdem, auf welcher Seite des Äquators P sich befindet, heißt die Breite nördlich oder südlich. Die Länge λ hingegen wird bestimmt durch den von M aus gemessenen Winkel zwischen der Ebene des Bezugsmeridians und der Richtung MP und beträgt somit höchstens 180° . Je nachdem, auf welcher Seite des Bezugsmeridians sich P befindet, heißt die Länge östlich oder westlich.

4.2 Kursberechnungen

4.2.1 Orthodromer Kurs

Der kürzere Großkreisbogen des Großkreises (oder bei Gegenpunkten der halbe Großkreis), der zwei Punkte verbindet, wird Orthodrome genannt und ist die kürzeste Verbindung dieser Punkte. Insbesondere beim Zurücklegen großer Distanzen ist es also sinnvoll, sich auf einer Orthodrome zu bewegen, um möglichst viel Strecke einzusparen. Um die Länge der Orthodrome zwischen einem Anfangsort A (Breite: φ_A ; Länge: λ_A) und einem Zielort B (Breite: φ_B ; Länge: λ_B) sowie den Anfangs- und Endkurswinkel zu berechnen, bildet man zusammen mit dem Nordpol N das sphärische Dreieck ABN . Liegen A und B auf der Nordhalbkugel, sind die Seiten a und b die jeweiligen Komplementärwinkel $90^\circ - \varphi_A$ und $90^\circ - \varphi_B$ der Breite (für Punkte auf der Südhalbkugel entsprechend $90^\circ + \varphi_A$ beziehungsweise $90^\circ + \varphi_B$). Die Seite c entspricht der Länge der Orthodrome, also der sphärischen Distanz, und der Winkel γ dem Breitenunterschied zwischen A und B . α ist der Anfangskurswinkel, $180^\circ - \beta$ der Endkurswinkel, wobei als Kurs der vollkreisig im Uhrzeigersinn angegebene Winkel zwischen Nordrichtung und Fahrtrichtung angegeben werden soll (vgl.[3] S.16).

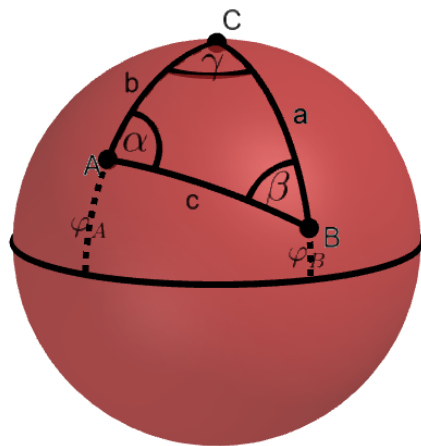


Abbildung 7: Poldreieck

Auf dieses so genannte Poldreieck lassen sich nun die in 3.4.3 genannten Formeln zur Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks anwenden.

4.3 Abituraufgabe von Wilhelm Terwey

4.3.1 Historische Einordnung

Wie in den meisten anderen Schulen wird das Thema „Sphärische Geometrie“ heutzutage kaum noch im Schulunterricht des Ubbo-Emmius-Gymnasiums behandelt. Das war jedoch nicht immer so. Zu Zeiten des NS-Regimes (1933-1945)

wurden die Curricula am damals „Staatliche Oberschule für Jungen“ genannten Gymnasium geändert, um die Schüler gemäß der NS-Ideologie zu erziehen und auf den Krieg vorzubereiten (vgl.[4]). So kam es, dass die Reifeprüfung im Mathematikunterricht 1944 unter anderem folgende von Wilhelm Terwey gestellte Aufgabe zum Thema „Luftangriff“ beinhaltete:

Eine Fernkampfbomberstaffel soll am 15. 2. 1944 von Paris aus auf die feindlichen Stützpunkte auf den Azoren starten. Der Angriff soll $\frac{1}{2}$ Stunde von Sonnenaufgang erfolgen. Wann und unter welchem (rechtsweisenden) Kurs muss gestartet werden? Die Startzeit ist in MGZ anzugeben.

Paris ($\phi_1 = 48,9^\circ N$; $\lambda_1 = 2,3^\circ O$)

Azoren ($\phi_2 = 38,5^\circ N$; $\lambda_1 = 28,0^\circ W$)

Sonnendeklination $\delta = -12,9^\circ$; ztgl: + 14 min

Fluggeschwindigkeit $v = 400 km/h$

4.3.2 Berechnung der Flugdauer und des Startkurses

Um zu berechnen, unter welchem Kurs gestartet werden muss, konstruiert man aus dem gegebenen Anfangsort Paris, dem Zielort Azoren und dem Nordpol ein Poldreieck mit den Seiten a , b , und c sowie den Winkeln α , β , und γ . a und b lassen sich als jeweilige Komplementärwinkel der Breite berechnen, γ entspricht dem Längenunterschied zwischen den beiden Orten (da Paris östlich und die Azoren westlich des Bezugsmeridians liegen, werden die Längen addiert).

$$\begin{aligned}\gamma &= \lambda_1 + \lambda_2 = 2,3^\circ + 28^\circ = 30,3^\circ \\ a &= 90^\circ - \varphi_1 = 90^\circ - 48,9^\circ = 41,1^\circ \\ b &= 90^\circ - \varphi_2 = 90^\circ - 38,5^\circ = 51,5^\circ\end{aligned}$$

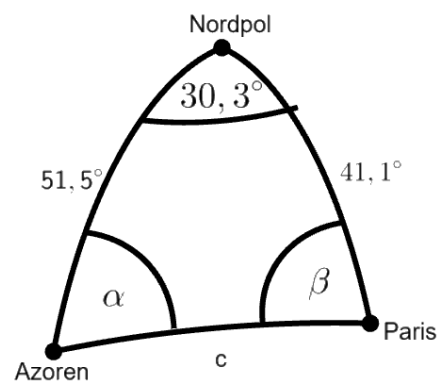


Abbildung 8: Poldreieck zu den Azoren und Paris

Da nun zwei Seiten $a = 41,1^\circ$ und $b = 51,5^\circ$ sowie der eingeschlossene

Winkel $\gamma = 30,3^\circ$ gegeben sind, kann der Seitenkosinussatz angewendet werden.

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma) \\ &= \cos(41,1^\circ)\cos(51,5^\circ) + \sin(41,1^\circ)\sin(51,5^\circ)\cos(30,3^\circ) \\ &\approx 0,913\end{aligned}$$

Die Distanz c zwischen Paris und den Azoren beträgt somit $24,0^\circ$, also $2660,88\text{km}$. Der Flug dauert daher $\frac{2660,88\text{km}}{400\frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 6,67\text{h}$ beziehungsweise 6 Stunden und ca. 40 Minuten.

Um den Startkurs zu berechnen, wird der Sinussatz angewendet.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(b)}{\sin(c)} &= \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \\ \sin(\beta) &= \frac{\sin(b)}{\sin(c)} \cdot \sin(\gamma) \\ \sin(\beta) &= \frac{\sin(51,5^\circ)}{\sin(24^\circ)} \cdot \sin(30,3^\circ) \\ \sin(\beta) &\approx 0,97\end{aligned}$$

Der Innenwinkel β des Poldreiecks beträgt demnach $76,1^\circ$. Der Kurs, unter welchem gestartet wird, wird berechnet durch $360^\circ - 76,1^\circ =$ und lautet **$283,9^\circ$** .

4.3.3 Berechnung des Sonnenaufgangs

Das Themenfeld der astronomischen Zeitberechnung ist zu komplex, um es in einem Untherthema dieser Facharbeit vollständig abzudecken. Der Vollständigkeit halber soll die für die Lösung der Aufgabe notwendige Berechnung der Sonnenaufgangszeit dennoch durchgeführt werden. Die dafür benötigten Formeln (übernommen aus [3]) werden im Folgenden ohne Herleitung verwendet.

Berechnung des Stundenwinkels t der Aufgangszeit auf den Azoren (Breite $\varphi = 38,5^\circ$) aus der der Sonnendeklination $\delta = -12,9^\circ$:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= -\tan(\varphi) \cdot \tan(\delta) \\ &= -\tan(38,5^\circ) \cdot \tan(12,9^\circ) \\ &\approx 0,182\end{aligned}$$

Der Stundenwinkel $t = 79,5^\circ$ entspricht einer wahren Ortszeit von 7:53 Uhr. Subtrahiert man die sogenannte Zeitgleichung für Paris, welche laut Aufgabenstellung 14 Minuten beträgt, erhält man die in MGZ angegebene Aufgangszeit

der Sonne. Diese lautet 7:39 Uhr. Da der Flug 6 Stunden und 40 Minuten dauert, muss um 0:59 Uhr MGZ in Paris gestartet werden.

Teil I

Anhang

Literatur

- [1] F. d. Bibliograph. Instituts. *Meyers Rechenruden*. Bibliograph. Institut, 1961.
- [2] S. P.Kaltenbach, Stein. *Lehrbuch der Navigation*. Arthur Geist Verlag, 1963.
- [3] W. F. Schmidt. *Astronomische Navigation*. Springer, 1983.
- [4] SeminarfachSchulgeschichte2022. Erziehung im krieg (2): Das ns-regime. URL <https://ubbo-1584.de/licht-und-schatten/erziehung-zum-krieg-erziehung-im-krieg-2-das-ns-regime/>.
- [5] G. Wolff. *Handbuch der Schulmathematik Band 4*. Hermann Schroedel Verlag, 1967.

Abbildungsverzeichnis

1	Kugelzweiecke	5
2	Eulersche Dreiecke	6
3	ABC mit den benachbarten Dreiecken BCA_1 , AB_1C und ABC_1	7
4	Darstellung eines Dreikants in <i>Astronomische Navigation</i> [3] (S.6)	8
5	Napierscher Kreis	10
6	Schiefwinkliges Dreieck	10
7	Poldreieck	13
8	Poldreieck zu den Azoren und Paris	14

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 5. Juni 2023

Vorname Nachname

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 5. Juni 2023

Vorname Nachname