



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Untersuchung mathematischer Kurven anhand ausgewählter Beispiele

Stella Frühling

NOTE: _____

PUNKTZAHL: _____

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

20 März 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Kurven in Natur und Technik	1
1.2	Kurvenbegriff	1
1.3	Definition von Kurven	2
1.4	Darstellung von Kurven	2
1.4.1	Polarkoordinaten	2
1.4.2	Parameterdarstellung	2
2	Untersuchung von Kurven	3
2.1	Bernoulli'sche Lemniskate	3
2.1.1	Gleichung	3
2.1.2	Flächeninhalt	5
2.1.3	Ableitung	6
2.1.4	Extrema	7
2.1.5	Ursprungstangenten	8
2.2	Cassini'sche Kurven	9
2.2.1	Definition	9
2.2.2	Gleichungen für die Cassini'schen Kurven	9
2.2.3	Y-Achsenschnittpunkte und Nullstellen	10
2.2.4	Cassini'sche Kurve als ellipsenförmiges Oval	11
2.2.5	Die Cassini'schen Kurven als Torusschnitt	11
3	Höhere Kurven im Mathematikunterricht	13
3.1	Gründe für die Behandlung im Unterricht	13
3.2	Unterrichtliche Realisierung	14
3.3	Fazit	14
	Literaturverzeichnis	15
	Abbildungsverzeichnis	15

1 Einführung

1.1 Kurven in Natur und Technik

Kurven begegnen uns im Alltag. Man verbindet sowohl Tätigkeiten als auch Erfahrungen mit dem Begriff der Kurve. So lässt sich der Wurf eines Balls zum Beispiel mathematisch durch eine Kurve darstellen. Aber auch andere Bewegungsabläufe, wie z.B. das Wälzen und Rollen von Gegenständen oder Bewegungen von starren Körpern können mathematisch betrachtet werden. Im Folgenden wird der freie Fall als Beispiel einer Kurve im homogenen Gravitationsfeld genauer ausgeführt.

Bewegt sich ein Körper in der Nähe der Erdoberfläche, dann wirkt auf diesen in jedem Punkt mit gleichem Betrag und in gleicher Richtung die Schwerkraft. Die Gewichtskraft F_G hängt dabei also von der Masse m und dem Ortsfaktor g mit 9,81 ab; es gilt $F_G = m \cdot g$.

Wirkt diese Kraft auf einen zunächst ruhenden Körper, kann beobachtet werden, wie dieser auf einer Geraden gleichmäßig nach unten beschleunigt wird. Die Geschwindigkeit $v(t)$ wächst proportional mit der Zeit t . Bei der Bahnkurve beim freien Fall handelt es sich daher um eine Gerade.

Hier konnte also ein physikalischer Zusammenhang mathematisch durch eine Kurve erfasst werden. Doch was steckt hinter dem Begriff der Kurve und wie lässt er sich heute definieren?

1.2 Kurvenbegriff

Bereits in der Antike befassten sich griechische Mathematiker mit dem Begriff der Kurve. Sie definierten die Kurve als „gerade“, „gebrochene“, „gebogene“ oder „gemischte“ Linie. (vgl. [SD95])

Im Band der Elemente von Euklid (um 300 v. Chr.) lässt sich der erste belegte Versuch einer Definition finden. „Er spricht darin von einer Linie als Länge ohne Breite und von der Grenze der Fläche.“ [SD95]

Der griechische Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexenadria (um 100 n. Chr.) erweitert später die Definition als „Bahn eines Punktes“ sowie weitere Dimensionsbetrachtungen.

Im Mittelalter wird die Kurve durch Pierre de Fermat (1601-1665) und René Descartes (1596-1650) in kartesischer Darstellung charakterisiert. Descartes betrachtet Kurven, die sich durch Gleichungen erklären lassen. Die Punkte algebraischer Gleichungen entsprechen dabei der Form $F(x; y) = 0$. Er unterscheidet außerdem zwischen den algebraischen und mechanischen Kurven, für die später von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) die Bezeichnung „transzendent“ eingeführt wird. Schließlich gibt Camille Jordan (1838-1922) eine analytische Definition des Kurvenbegriffs:

1.3 Definition von Kurven

Eine Kurve ist die Menge der Punkte $P = (x, y)$, die durch eine Parameterdarstellung mit $x = f(t)$ und $y = g(t)$ mit Funktionen f und g dargestellt werden. Eine Kurve heißt stetig, wenn f und g stetige Funktionen sind.

1.4 Darstellung von Kurven

Um Kurven mathematisch zu beschreiben, nutzt man neben der kartesischen Darstellung, die aus dem Schulunterricht bereits bekannt ist, die Polarkoordinatendarstellung und die Parameterdarstellung.

Die Einführung dieser Darstellungen ermöglicht zum Beispiel das Untersuchen von Flächen oder Bogenlängen von Kurven.

1.4.1 Polarkoordinaten

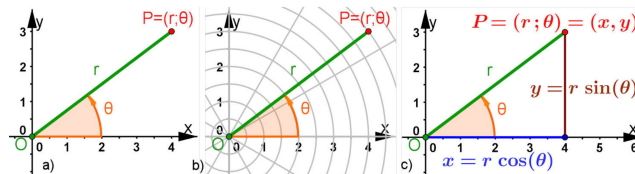


Abbildung 1: Polarkoordinaten ($\varphi \hat{=} \theta$) [Haf16a]

In der kartesischen Darstellung hat ein Punkt die Koordinaten $P = (x, y)$. Dann hat der Punkt P die Polardarstellung $P = (r; \varphi)$. Dabei ist $|r|$ der Abstand von P zum Ursprung bzw. dem **Pol** und φ der Winkel von der x-Achse bzw. der **Polarachse** und dem **Fahrstrahl** OP . Damit gelten für die Umrechnung die folgenden Grundgleichungen:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \quad y = r \cdot \sin(\varphi) \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

1.4.2 Parameterdarstellung

„Parameterdarstellungen sind das **übergreifende Konzept**, mit dem Punkte der Geometrie mit Koordinaten verbunden werden.“ [Haf16b]

Bei dieser Darstellung hat das Wort „Parameter“ die Bedeutung Hilfsvariable. So hat t die Funktion einer Variablen von x und y , wobei x und y dann die eigentlichen Variablen einer Funktion sind.

Definition:

Es sei der Parameter t eine reelle Zahl. $x(t)$ und $y(t)$ Funktionen dieser Parameter, dann ist durch $x = x(t)$, $y = y(t)$ eine Kurve in der Ebene gegeben.

2 Untersuchung von Kurven

2.1 Bernoulli'sche Lemniskate

Die **Bernoulli'sche Lemniskate** ist eine schleifenförmige geometrische Kurve in der Form einer liegenden Acht, die nach dem schweizerischen Mathematiker Jakob I Bernoulli benannt wurde. Er befasste sich mit den analytischen Eigenschaften wie der Steigung, der Krümmung, der Fläche und der Bogenlänge. (vgl. [Haf16b]) Im Folgenden werden nach ihm der Flächeninhalt, die Ableitung, die Extrema sowie die Ursprungstangenten untersucht.

2.1.1 Gleichung

Wie unter 1.3 schon erwähnt gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von Kurven. Damit unterscheiden sich auch die aus ihnen resultierenden Gleichungen. Bei der Lemniskate gehen wir nun auf die implizite kartesische Gleichung, die Polargleichung und die Parameterdarstellung der Lemniskate ein. Die Lemniskate gehört zu den bipolaren Kurven mit den Brennpunkten $E = (e, 0)$ und $E' = (-e, 0)$. Diese haben den Abstand $2e$ zueinander. Für jeden Punkt P der Kurve gilt, dass das Produkt der beiden Abstände $r' = \overline{EP}$ und $r'' = \overline{E'P}$ den Wert e^2 hat. Daher gilt $r' \cdot r'' = e^2$. (vgl. [Ste20])

Herleitung der Gleichung in Polarkoordinaten

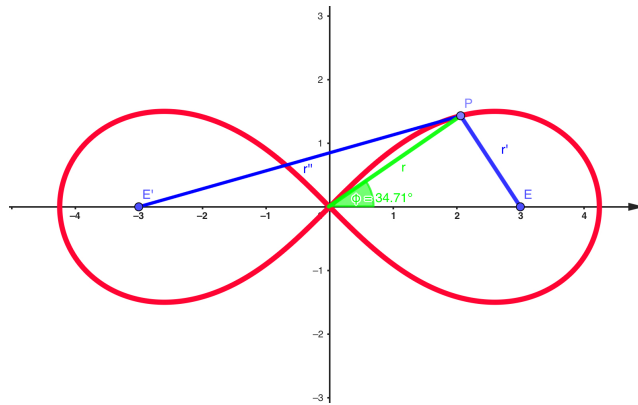


Abbildung 2: Polardarstellung der Lemniskate

Für die Herleitung der Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten nutzt man den Kosinussatz.

Im Dreieck $\triangle OEP$ gilt:

$$r'^2 = r^2 + e^2 - 2e \cdot r \cdot \cos(\varphi) \quad (2)$$

Im Dreieck $\triangle OE'P$ gilt:

$$r''^2 = r^2 + e^2 - 2er \cdot \cos(\pi - \varphi) = r^2 + e^2 + 2e \cdot r \cos(\varphi) \quad (3)$$

Durch die Definition der bipolaren Kurve gilt:

$$e^4 = r'^2 \cdot r''^2 \quad (4)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (2) und (3) für r'^2 und r''^2 und Umformen erhält man die **Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten**:

$$r^2 = 2e^2 \cos(2\varphi) \quad (5)$$

Implizite kartesische Gleichung

Die **implizite kartesische Gleichung** lautet:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2e^2 (x^2 - y^2) \quad (6)$$

Wird der Parameter t als $\cos(2\varphi)$ definiert, erhält man die Gleichung $r^2 = 2e^2 t$. Mit den Grundgleichungen (1) folgt daraus $x^2 = 2e \cdot t \cos(\varphi)^2$ und $(y^2)^2 = e^2 \sin(\varphi)^2$.

Durch das Auflösen des Kosinus- bzw. Sinusters und das Einsetzen in den x - bzw. y -Term, erhält man die **Parameterdarstellungen der Lemniskate** mit dem Brennpunktabstand $2e$:

$$x^2 = e^2(t + t^2), \quad y^2 = e^2(t - t^2) \quad (7)$$

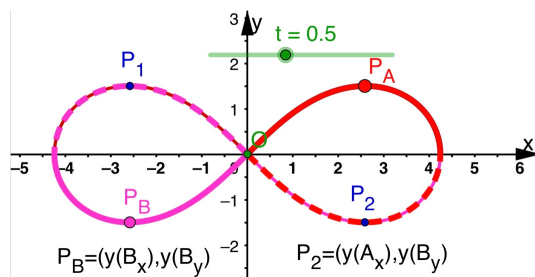


Abbildung 3: Parameterdarstellung der Lemniskate [Haf16a]

2.1.2 Flächeninhalt

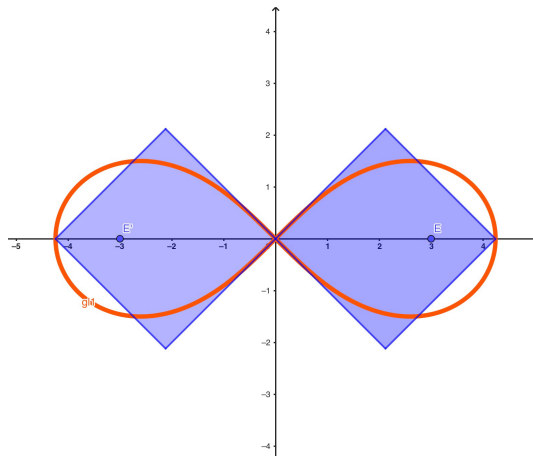


Abbildung 4: Flächeninhalt der Lemniskate

Die Fläche einer Kurve, die durch eine Polargleichung $r = r(\varphi)$ gegeben ist und vom Fahrstrahl zu φ_0 und dem Fahrstrahl zu φ_1 eingeschlossen wird, lässt sich berechnen durch:

$$A(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r(\varphi)^2 d\varphi \quad (8)$$

Mithilfe des Integrals der Polargleichung (5) lässt sich nun der Flächeninhalt bestimmen. Dabei muss die Funktion stetig und differenzierbar sein. Aufgrund der doppelten Achsensymmetrie der Lemniskate kann das Integral für den ersten Quadranten berechnet und dann mit vier multipliziert werden. Für den gesamten Flächeninhalt gilt dann:

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2e^2 \cos(2\varphi)) d(\varphi) \\ &= 4e^2 \left[\frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2e^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Der Flächeninhalt der Lemniskate mit Brennpunktabstand $2e$ beträgt $2e^2$. Wird ein Quadrat mit der Seitenlänge e konstruiert, dass mit seiner Diagonale $\sqrt{2}e$ genau in die Lemniskate passt, fällt auf, dass der Flächeninhalt des Quadrats mit dem Flächeninhalt des rechten Teils der Schleife übereinstimmt. Die violett gefärbten Quadrate in Abbildung 4 entsprechen also dem Flächeninhalt der Lemniskate.

2.1.3 Ableitung

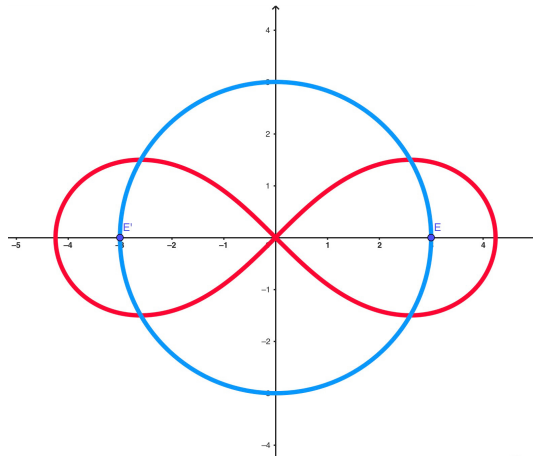


Abbildung 5: Ableitung der Lemnisikate

Um die Gleichung der Lemnisikate abzuleiten, eignet sich die implizite kartesische Gleichung. Die Funktion muss hierfür stetig und differenzierbar sein. Bei der Standardform $F(x, y) = 0$ wird die gesamte Gleichung nach x abgeleitet und das y bleibt abhängig von x , also $y = f(x)$.

„Es wird $F'(x, f(x)) = 0$ durch implizites Ableiten gebildet.“ ([Haf16b])

$$\begin{aligned} ((x^2 + y^2)^2)' &= (2e^2(x^2 - y^2))' \\ (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)' &= (2e^2x^2 - 2e^2y^2)' \\ (x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2e^2x^2 + 2e^2y^2)' &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe der Produktregel kann dann der Term abgeleitet werden:

$$4x^3 + 4xy^2 + 2x^2yy' + 4y^3y' - 4e^2x + 4e^2yy' = 0$$

Für waagerechte Tangenten lässt sich $y' = 0$ setzen, sodass man die folgende Gleichung erhält:

$$0 = 4x^3 + 4xy^2 - 4e^2x$$

Anschließend kann man durch $4x$ dividieren, da bei $x = 0$ keine waagerechte Tangente vorliegt. Dadurch bleibt die Kreisgleichung, die in Abbildung 5 zu sehen ist.

$$x^2 + y^2 = e^2 \tag{10}$$

2.1.4 Extrema

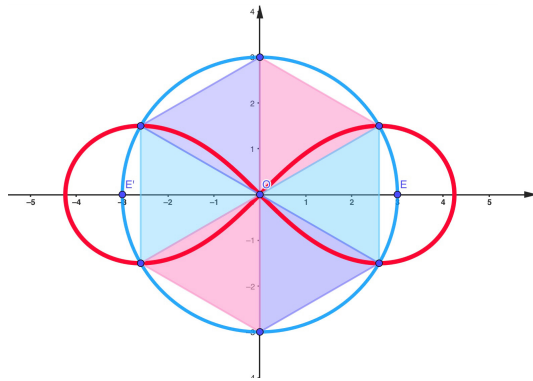


Abbildung 6: Extrema der Lemnisikate

Die Abbildung 6 zeigt die Lemniskate und ihre Ableitung, mit der man schon graphisch die Extrempunkte und Wendepunkte ablesen kann.

So liegen die Extrema der Lemniskate auf dem Kreis um den Ursprung durch die Brennpunkte. (vgl. [Haf16b]) Es lässt sich erkennen, dass es vier Extrempunkte gibt, die zu einem regelmäßigen Sechseck gehören, dass sich mit der Spitze auf der Y-Achse auf dem blauem Kreis konstruieren lässt und aus gleichseitigen Dreiecken mit der Kantenlänge e besteht.

Rechnerisch lassen sich die Extrempunkte bestimmen, indem man zunächst $x^2 = e^2 - y^2$ in die Lemnisikatengleichung einsetzt.

$$\begin{aligned}
 ((e^2 - y^2) + y^2)^2 &= 2e^2 ((e^2 - y^2) - y^2) \\
 e^4 &= 2e^4 - 4e^2 y^2 \\
 4e^2 y^2 &= e^4 \\
 y^2 &= \frac{e^2}{4} \\
 y &= \frac{e}{2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Durch Einsetzen von (11) in die waagerechte Tangentengleichung ergeben sich **zwei Extremstellen**:

$$\begin{aligned}
 0 &= 4x^3 + 4x \left(\frac{e}{2}\right)^2 - 4e^2 x \\
 0 &= 4x^3 + 4x \frac{e^2}{4} - 4e^2 x \\
 0 &= 4x^3 + xe^2 - 4e^2 x \\
 0 &= 4x^3 - 3e^2 x \\
 x &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2} e
 \end{aligned} \tag{12}$$

Durch Einsetzen von (12) in die Lemniskatengleichung erhält man **vier Extrempunkte**:

$$EP = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}e, \pm \frac{1}{2}e \right) \quad (13)$$

2.1.5 Ursprungstangenten

Unter 2.1.4 konnte gezeigt werden, dass die Extrema der Lemniskate auf dem Kreis um den Ursprung durch die Brennpunkte liegen. Dabei schneiden die waagerechten Tangenten den Kreis.

Des Weiteren liegen bei der Lemniskate wie in Abbildung 7 zu sehen ist zwei Ursprungstangenten vor. Die beiden Ursprungstangenten schneiden ebenfalls den Kreis. Doch welche Koordinaten haben die Schnittpunkte?

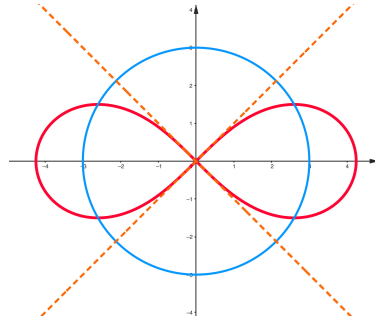


Abbildung 7: Schnittpunkte der Ursprungstangenten

Um die Schnittpunkte zu berechnen, zieht man die Kreisgleichung k und die Gleichung der Tangenten g heran. Diese haben die Steigungen ± 1 , da der Kosinusterm für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 0 wird.

$$k : x^2 + y^2 = e^2 \quad g : x = y \quad (14)$$

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= e^2 \\ 2x^2 &= e^2 \\ x &= \frac{1}{2}\sqrt{2}e \end{aligned} \quad (15)$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften ergeben sich für die anderen Schnittpunkte die gleichen Werte nur mit anderen Vorzeichen:

$$S = \left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}e, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}e \right) \quad (16)$$

Die Schnittpunkte sind als halbe Längen der Diagonalen des Quadrats mit der Kantenlänge e zu interpretieren. (siehe Abbildung 4)

2.2 Cassini'sche Kurven

2.2.1 Definition

Eine **Cassini'sche Kurve** ist die Ortslinie aller Punkte P , die von zwei festen Punkten E und E' ein konstantes **Abstandsprodukt** haben. Es gilt also für die Abstände r und r' von E bzw. E' : $r \cdot r' = k^2$ mit einer reellen Zahl k .

Sie wurden nach dem Astronom und Mathematiker Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) benannt, der als Professor in Bologna das ptolemäische, geozentrische Weltbild lehrte. Er war davon überzeugt, „dass die Bahnkurve der Sonne bei ihrem Lauf um die Erde die oben angesprochene Ortslinieneigenschaft hat, wobei die Erde in einem der beiden Brennpunkte steht.“ ([SD95]) Damit lehnte er unter anderem Keplers Theorie ab, die beinhaltete, dass es sich bei Planetenbahnen um Ellipsen handeln müsse, in deren Brennpunkt die Sonne steht.

2.2.2 Gleichungen für die Cassini'schen Kurven

Von der bipolaren Gleichung $r \cdot r' = k^2$ kann man dann zur impliziten kartesischen Gleichung gelangen, indem man den Satz des Pythagoras anwendet. Für r^2 lässt sich $(e - x)^2 + y^2$ einsetzen und für $(r')^2$ $(e + x)^2 + y^2$. Daraus folgt direkt aus der Definition die Gleichung:

$$\left((e - x)^2 + y^2\right) \left((e + x)^2 + y^2\right) = k^4 \quad (17)$$

Diese lässt sich dann noch weiter umformen, sodass man die **implizite kartesische Darstellung** erhält:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = k^4 - e^4 \quad (18)$$

Aus der impliziten kartesischen Gleichung folgt schließlich durch das Additionstheorem $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2$ bei Verwendung der Grundgleichungen (1) die **Implizite Polargleichung**:

$$r^4 - 2e^2 r^2 \cos(2\varphi) = k^4 - e^4 \quad (19)$$

Auffällig bei den Gleichungen der Cassini'schen Kurve ist, dass es im Gegensatz zu den Gleichungen der Lemniskate einen Schieberegler k gibt. Das liegt daran, dass beim Spezialfall der Lemniskate, e dem Schieberegler k entspricht. Wird k gegenüber e sehr groß, nähert sich die Cassini'sche Kurve der Kreisform.

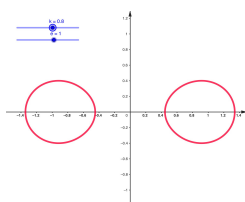


Abbildung 8: $k < e$

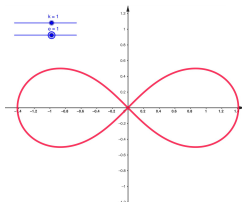


Abbildung 9: $k = e$

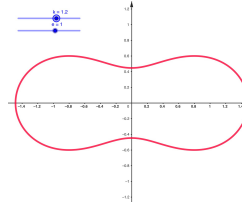


Abbildung 10: $k > e$

2.2.3 Y-Achsenschnittpunkte und Nullstellen

Nullstellen

Um die Nullstellen zu berechnen, setzt man $y = 0$ in die Gleichung (17).

$$\begin{aligned} ((e-x)^2 + 0^2) ((e+x)^2 + 0^2) &= k^4 \\ (e-x)^2 (e+x)^2 &= k^4 \\ (e^2 - x^2)^2 &= k^4 \end{aligned}$$

Wird dann nach x aufgelöst, ergibt sich:

$$\begin{aligned} x^2 &= e^2 \pm k^2 \\ x &= \pm \sqrt{e^2 \pm k^2} \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn $k > e$ ist, dann sind es genau zwei Nullstellen $x = \pm \sqrt{e^2 + k^2}$. Es liegt also eine Kreisform vor.

Ist $k = e$, dann dann gibt es drei Schnittpunkte mit der X-Achse, nämlich $x = \pm \sqrt{2}e$ und es handelt sich folglich um die Lemniskate.

Wenn $k < e$, dann kommen vier Nullstellen zustande.

Y-Achsenabschnitt

Ähnlich wie bei der Berechnung der Nullstellen setzt man hier $x = 0$ in die Gleichung (17).

$$\begin{aligned} ((e-0)^2 + y^2) ((e+0)^2 + y^2) &= k^4 \\ (e^2 + y^2)^2 &= k^4 \\ (e^2 + y^2) &= \pm k^2 \end{aligned}$$

Löst man schließlich nach y , so ergibt sich:

$$y = \pm \sqrt{k^2 - e^2} \tag{21}$$

Folglich gibt es zwei Y-Achsenschnittpunkte für $k > e$.

Entspricht k wieder e , handelt es sich um den Spezialfall der Lemniskate und

es gibt einen Schnittpunkt im Ursprung mit der Y-Achse.
 Wenn $k < e$, gibt es keine gemeinsamen Schnittpunkte.

Die Untersuchung der Nullstellen und Y-Achsenabschnitte hat also gezeigt, dass wie zunächst zwischen drei verschiedenen Fällen unterscheiden können. Die Abbildung 6 zeigt, dass wenn $k < e$ zwei voneinander getrennte Formen, die tropfen- oder kreisförmig aussehen entstehen.(vgl. [Wir16]) Wenn $k = e$ ist, die Lemniskate von Bernoulli und wenn $k > e$ ist, eine geschlossene Kurve. Der dritte Fall lässt sich noch etwas genauer untersuchen, denn wenn $k > e$ ist, entsteht zunächst ein ellipsenförmiges Oval, dass sich schließlich einem Kreis mit dem Radius e nähert. Daraus lässt sich die Frage ableiten, wann genau Cassini'sche Kurven mit und ohne Sattel entstehen.

2.2.4 Cassini'sche Kurve als ellipsenförmiges Oval

Dafür untersuchen wir die Lage der Extrema bzw. deren Anzahl, wenn $k > e$. Dazu wird die implizite Ableitung der Gleichung (18) gebildet. (vgl. [Wir16])

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) &= k^4 - e^4 \\ 4x(x^2 + y^2 - e^2) + y'4y(x^2 + y^2 + e^2) &= 0\end{aligned}$$

bzw. für $y' = 0$

$$x(x^2 + y^2 - e^2) = 0 \tag{22}$$

Diese Gleichung führt zu einer einfachen Konstruktion der Extrema, wenn $x \neq 0$, denn sie sind die Schnittpunkte der Kurve und des Ursprungskreises mit Radius e . Dieser Kreis existiert jedoch nicht mehr, wenn der y-Achsenabschnitt höher als e liegt. Daher entsteht die ovale Form ohne die Sattelpunkte, wenn $e \leq \sqrt{k^4 - e^2}$ bzw. $e \leq \frac{k}{\sqrt{2}}$ ist.

2.2.5 Die Cassini'schen Kurven als Torusschnitt

So wie die Bernoulli'sche Lemniskate ein Spezialfall der Cassini'schen Kurve ist, lässt sich diese wiederum den Torusschnittlinien unterordnen. Die Cassini'schen Kurven können als Randlinien von ebenen Schnitten eines Torus entstehen.

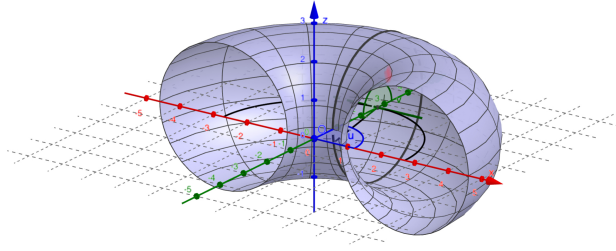


Abbildung 11: Torusschnitt

Die Abbildung des Torusschnitt zeigt, dass die Schnittebene und die Torusachse parallel zueinander sind. Der Abstand dieser beiden Gebilde entspricht dem Radius des rotierenden Toruskreises. (vgl. [SD95]) Sei nun e der Abstand vom Mittelpunkt des Toruskreises zur Rotationsachse z und sei s der Rotationskreisradius, dann gilt für einen Punkt $P(x, y)$ auf dem Schnitttrand bzw. dessen Abstand d von der Achse mit dem Satz des Pythagoras: (vgl. [SD95])

$$d^2 = x^2 + s^2 \quad (23)$$

sowie

$$(e - d)^2 + y^2 = s^2 \quad (24)$$

Im Anschluss setzt man in die Gleichung (24) für d ein, woraus folgt:

$$\begin{aligned} e^2 - 2e \cdot \sqrt{x^2 + s^2} + x^2 + s^2 + y^2 &= s^2 \\ e^2 - 2e \cdot \sqrt{x^2 + s^2} + x^2 + s^2 &= s^2 - y^2 \\ -2e \cdot \sqrt{x^2 + s^2} &= -y^2 - x^2 - e^2 \\ 4e^2 \cdot (x^2 + s^2) &= (x^2 + y^2 + e^2)^2 \end{aligned}$$

und schließlich:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2e^2 \cdot (x^2 - y^2) = 4e^2 s^2 - e^4$$

Wird hierin $\frac{k^2}{2} := e \cdot s$ eingesetzt, lässt sich die Ausgangsgleichung (18) der Cassini'schen Kurve wiedererkennen.

Die verschiedenen Formen der Kurve kommen zustande, indem man den Radius e der Umlaufbahn des Torus verändert.

Es konnte also gezeigt werden, dass die Cassini'sche Kurve eine von vielen Torusschnittlinien ist.

3 Höhere Kurven im Mathematikunterricht

Nach der Untersuchung der Lemniskate und der Cassini'schen Kurve soll es zum Schluss um die Frage gehen, ob höhere Kurven im Mathematikunterricht behandelt werden sollten oder nicht.

In den letzten zwei Jahrhunderten wurden höhere Kurven nur selten im Lehrplan aufgeführt. (vgl. [SD95]) So war im 19. Jahrhundert der allgemeine Funktionsbegriff und die Behandlung der Kegelschnitte sehr umstritten und wurde erst mit den preußischen Lehrplänen von 1901 verpflichtend eingeführt (vgl. [SD95]), wobei um die Jahrhundertwende auch schon vereinzelt Abituraufgaben gestellt wurden. So sollte zum Beispiel 1897 an der Oberrealschule in Straßburg in einer Abituraufgabe die Herleitung der Gleichung der Evolute der Kardiode erfolgen.

Heute werden (gekrümmte) Kurven im Unterricht meist als Graphen von Funktionen oder als Kegelschnitte behandelt. Verschiedenartige Parameterkurven, wie etwa die Zykloide oder bipolare Kurven, wie die Cassini'sche Kurve werden dagegen selten unterrichtet. Dabei sprechen einige Gründe dafür. (vgl. [Wak13])

3.1 Gründe für die Behandlung im Unterricht

Für die Behandlung höherer Kurven im Unterricht spricht zum Einen ihre mathematikhistorische Bedeutung. So untersuchten „bereits die griechischen Mathematiker Kurven im Zusammenhang mit der Lösung klassischer Probleme, wie etwa der Kreisquadratur.“ ([Wak13]) Die in der Antike gewonnenen Erkenntnisse wurden schließlich in der Renaissance wieder aufgenommen. Sie treiben später unter anderem durch Descartes und Leibniz zum Beispiel die Differential- und Integralrechnung voran.

Zum Anderen spielen Kurven nicht nur in der Mathematik eine bedeutsame Rolle, „sondern auch in der uns umgebenen Wirklichkeit.“ ([SD95])

Sie treten zum Beispiel häufig in der Physik und Technik als Bahnen bestimmter Massenpunkte in Gelenken, Kurbeln und Motoren auf. (vgl. [SD95]) Aber auch in der Natur lassen sich höhere Kurven in Form von linienförmigen Gegenständen bzw. Verläufen wie zum Beispiel Halme, Wurzeln, Maserungen oder Begrenzungslinien wiederfinden. (vgl. [SD95])

Des Weiteren eignen sich höhere Kurven sehr gut für die schulübliche Kurvendiskussion, aber auch für darüber hinausgehende Untersuchungen. So lassen sich unter anderem bei der Lemniskate Eigenschaften wie Nullstellen, Schnittpunkte mit der y-Achse, Symmetrien, Extremwerte oder lotrechte Tangenten untersuchen.

Schülerinnen und Schüler können die Gestalt einer Kurve also beobachten,

aber auch mit ihr experimentieren, indem sie die Kurven unter Zuhilfenahme einer Software konstruieren oder Parametereinstellungen verändern. Außerdem bieten Kurven die Möglichkeit Vermutungen auf selber formulierte Fragestellungen anzustellen.

Auch liegt in den höheren Kurven ein gewisser ästhetischer Reiz, der durch einige Merkmale höherer Kurven, wie Achsen,-Punkt- und Drehsymmetrien, Periodizität oder die Vielfalt beeindruckender Formen hervorgerufen werden können.(vgl. [SD95])

3.2 Unterrichtliche Realisierung

Die Behandlung höherer Kurven im Mathematikunterricht setzt algebraische, geometrische und trigonometrische Grundkenntnisse voraus, weshalb sie in der Sekundarstufe I weniger in Frage kommt. In der Sekundarstufe II hingegen lässt sich nach bestimmten Vorarbeiten, zum Beispiel zu den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten, eine Kurvendiskussion durchführen. Denkbar wäre auch ein Problemeinstieg in die Analysis anhand einer interessanten Kurve, ohne große Vorarbeit.

Es würde sich außerdem anbieten, höhere Kurven fächerübergreifend zu unterrichten. Im Fach Biologie könnte man auf das Vorkommen von Spiralen in der Natur eingehen. So kann bei der Schale des Nautilus zum Beispiel die goldene Spirale entdeckt werden. (vgl. [Wak13]) Auch physikalische Probleme würden im Mathematikunterricht behandelt werden. So entstehen etwa in einer Kaffeetasse Kaustiken als Hüllkurven reflektierter Lichtstrahlen.

3.3 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass höherer Kurven aufgrund ihrer mathematikhistorischen Bedeutung, ihrer Realitätsnähe und ihres ästhetischen Reizes im Unterricht behandelt werden sollten. Durch fächerübergreifenden Unterricht oder durch einen Problemeinstieg in die Analysis kann das Interesse von Schülerinnen und Schülern geweckt werden.

Darüber hinaus können durch die Arbeit mit höheren Kurven auch wichtige Fähigkeiten wie logisches und analytisches Denken und Problemlösungskompetenz entwickelt werden.

Literatur

- [SD95] Hans Schupp und Heinz Dabrock. *Höhere Kurven: situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte*. Bd. 28. BI Wissenschaftsverlag, 1995.
- [Wak13] Florian Wakolbinger. *Kurven im Mathematikunterricht*. 2013. URL: http://idmthemen.pbworks.com/w/file/63332516/DIPLOMARBEIT_FlorianWakolbinger.pdf (besucht am 16.03.2023).
- [Haf16a] Dörte Haftendorn. *Kurven erkunden und verstehen*. 2016. URL: <http://www.kurven-erkunden-und-verstehen.de/> (besucht am 04.03.2023).
- [Haf16b] Dörte Haftendorn. *Kurven erkunden und verstehen: Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen*. Springer-Verlag, 2016.
- [Wir16] Marwin Wirtz. *Die Cassinischen Kurven und insbesondere die Lemniskate von Bernoulli*. 2016. URL: https://download.uni-mainz.de/mathematik/Algebraische20Geometrie/Lehre/Sem-Ausgewaehlte-hoehere-Kurven-WS2016-17/Marwin20Wirtz_Cassinische20Kurven_101116.pdf (besucht am 17.03.2023).
- [Ste20] Thomas Steinberg. *Die Lemniskate*. 2020. URL: <https://mathepedia.de/Lemniskate.html> (besucht am 10.03.2023).

Abbildungsverzeichnis

1	Polarkoordinaten ($\varphi \hat{=} \theta$) [Haf16a]	2
2	Polardarstellung der Lemniskate	3
3	Parameterdarstellung der Lemniskate [Haf16a]	4
4	Flächeninhalt der Lemniskate	5
5	Ableitung der Lemniskate	6
6	Extrema der Lemniskate	7
7	Schnittpunkte der Ursprungstangenten	8
8	$k < e$	10
9	$k = e$	10
10	$k > e$	10
11	Torusschnitt	12

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 20. März 2023

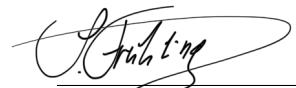


Stella Frühling

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 20. März 2023



Stella Frühling