



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Kurze Einführung in die Graphentheorie und deren Anwendung auf neuronale Signalübertragung

Lilith Schüler

NOTE: _____

PUNKTZAHL: _____

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

4. Dezember 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Definition von Graphen und weitere Begrifflichkeiten	1
3	Eigenschaften von Graphen	3
3.1	Gerichtete und ungerichtete Graphen	3
3.2	Stark, schwach und nicht zusammenhängende Graphen	4
3.3	Gewichtete und ungewichtete Graphen	4
3.4	Pfade und Kreise	5
3.5	Isomorphie in der Graphentheorie	5
4	Knotengrad	6
4.1	Knotengrad bei ungerichteten Graphen	6
4.2	Knotengrad bei gerichteten Graphen	7
5	Darstellung der Graphen in Matrizen	8
5.1	Adjazenzmatrix und Adjazenzliste	8
5.2	Inzidenzmatrix und Inzidenzliste	9
6	Algorithmen	10
6.1	Greedy-Algorithmus	10
6.2	Dijkstra-Algorithmus	11
7	Arten von Graphen	13
8	Graphentheorie anhand der Biologie der Nervenzelle im Gehirn	14
8.1	Aufbau und Funktion der Nervenzelle (Neuron)	14
8.2	Impulsübertragung	15
8.3	Verschiedene Nervenzellentypen	16
8.4	Graphische Darstellung der Impulsübertragung zwischen Nervenzellen	16
8.5	Anwendung des Dijkstra-Algorithmus am Netzwerk der Neuronen	19
9	Fazit	21
	Literatur	22
	Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	23

1 Einleitung

Das Gehirn ist für den Menschen eines der interessantesten Forschungsgebiete, da diesem all seine Gedanken entspringen und es für die Steuerung unseres Körpers zuständig ist. Durch das Gehirn werden Wahrnehmung und Denken erst ermöglicht. Doch das Gehirn stellt Hirnforscher wiederholt vor Herausforderungen, da es eine hohe Komplexität aufweist. Es besteht aus etwa 100 Milliarden Nervenzellen, die miteinander vernetzt sind und komplexe Netzwerke bilden. Die genaue Funktionsweise dieser Netzwerke und wie sie zur Entstehung von Bewusstsein, Intelligenz und Verhalten beitragen, sind noch nicht vollständig verstanden. Um dieses Organ genauer zu untersuchen, darstellen zu können und zu analysieren, bedarf es einer Lösung.

Findet die Graphentheorie Anwendung in der Neurobiologie und wenn ja, welchen Nutzen hat sie? Kann die Graphentheorie die Komplexität neuronaler Netzwerke darstellen und analysieren?

2 Definition von Graphen und weitere Begrifflichkeiten

Ein Graph (griechisch: Schrift) ist eine abstrakte Darstellung von Objekten und deren Beziehung zueinander und besteht üblicherweise aus Linien und Punkten. Wie diese Punkte und Linien gezeichnet werden, hängt vom Zweck und der Ästhetik ab. Ein Graph reduziert die Komplexität eines Sachverhaltes und stellt diesen bildlich und vereinfacht dar.

Die Linien nennt man dabei Kanten und die Punkte Knoten oder auch Ecken.

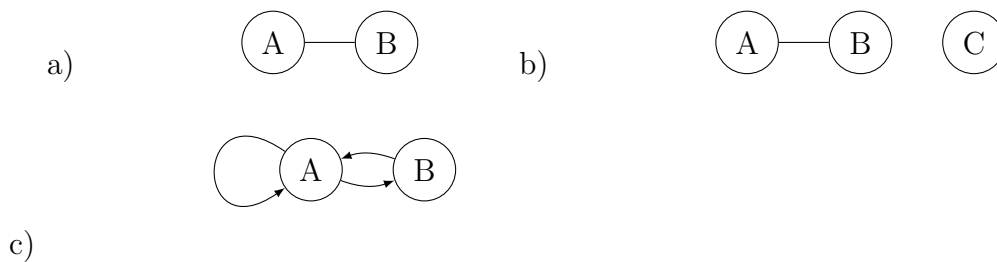


Abbildung 1: Drei Beispiele für Graphen

Ein einfacher Graph stellt zwei Objekte, A und B, und ihre Verbindung dar (Abb. a). Dabei sind einzelne Knoten jedoch nicht zwingend mit Kanten verbunden (Abb. b) oder können sogar durch zwei oder mehr Kanten verbunden sein (Abb. c).

Ein Graph G ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter Mengen¹, dabei steht V für

¹: getrennt; Zwei Mengen sind disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

vertices, das englische Wort für Knoten, und E für *edges*, englisch für Kanten. Häufig werden die Kanten in einem Graphen also auch e_1, e_2 , usw. benannt und gleichzeitig durchnummeriert. Ein Knoten v ist also $v \in V$ und eine Kante e ist $e \in E$. Dabei sind die Elemente von E jeweils immer zwei-elementige Teilmengen von V , da eine Kante e formal als $e = (v_1, v_2)$ dargestellt wird. Die Anzahl der Knoten wird häufig mit n bezeichnet; ein Graph hat also n Knoten, da $n = |V|$. Ebenso wird die Anzahl der Kanten mit m wiedergegeben; ein Graph hat also m Kanten, da $m = |E|$.²

Beispiel: Elektrische Impulsübertragung zwischen Neuronen

Als weiteres Beispiel bilde ich bereits näherungsweise einen abstrakten Graphen des Nervensystems. Zunächst ist zu verstehen, dass die Neuronen durch die Übertragung elektrischer Impulse verbunden sind. (Der genaue Aufbau und die Funktionsweise wird im weiteren Verlauf erläutert, wenn die Problemfrage nach den Erklärungen graphentheoretischer Begriffe direkt aufgegriffen wird. *siehe 8 S.14*))

Um das Senden elektrischer Impulse im Gehirn zwischen Neuronen zu verdeutlichen, werden die Neuronen als Ecken und die Wege der Impulse als Kanten dargestellt. Im Beispiel werden sechs Neuronen interpretiert A-F. Es wird die Menge $V = (A, B, C, D, E, F)$ betrachtet.³

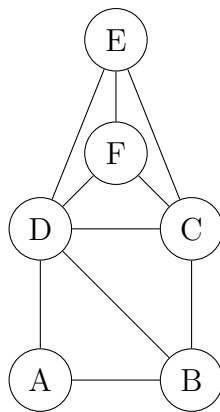


Abbildung 2: Erste graphische Annäherung an die Entsendung elektrischer Impulse zwischen Neuronen im Gehirn

Zur Verdeutlichung wird der Graph $ZI^4 = (I, N)$ genannt. Bei einer einfachen Verbindung von Neuronen verläuft der entsendete Impuls immer nur in eine Richtung und ein Neuron kann entweder nur Empfänger oder nur Absender des gleichen Impulses sein. Der Graph hat also die Richtung der Impulse und die Relation zwischen den Neuronen anzuzeigen.⁵

²vgl. Diestel(2017)[4], S.2f und Tittman(2003)[16]

³vgl. Batschelet(2013)[1], S.55

⁴ZI für zerebrale Impulse, I= Impulse, N= Neuronen

⁵vgl. Batschelet(2013)[1], S.56

3 Eigenschaften von Graphen

Um die Beziehung zwischen Objekten und ihre Merkmale aufzuzeigen, muss der Graph verschiedene Eigenschaften aufweisen können. Anhand des Neuronenbeispiels wird diese Problematik deutlich.

3.1 Gerichtete und ungerichtete Graphen

Bei gerichteten und ungerichteten Graphen liegt der Unterschied in der Art der Kanten zwischen den Knoten. Verläuft eine Kante, wie im Neuronenbeispiel, nur in eine Richtung, wird diese als Pfeil dargestellt und der Graph ist gerichtet. Es wird also ein Knoten als Ausgangspunkt und ein anderer Knoten als Endpunkt der Kante festgelegt. Bei ungerichteten Graphen besteht lediglich eine einfache Verbindung zwischen den Knoten und die Kante kann in beide Richtungen genutzt werden. Die Menge E der Kanten ist bei ungerichteten Graphen eine Teilmenge aller zwei-elementigen Teilmengen V . Bei gerichteten Graphen ist E ebenfalls zwei-elementig, jedoch lediglich die Teilmenge von Paaren, die durch das kartesische Produkt⁶ $V \times V$ entstehen.⁸



Abbildung 3: Gerichteter (a) und ungerichteter (b) Graph

Beispiel: Elektrische Impulsübertragung zwischen Neuronen

Bezogen auf das Senden von elektrischen Impulsen im Neuronensystem, liegt also ein gerichteter Graph vor, da die Impulse lediglich in eine Richtung entsendet werden können.

Das Neuron A in der Abbildung 4 kann lediglich die entsendeten Impulse von Neuron B und D empfangen, während das Neuron C sowohl elektrische Impulse entsenden kann als auch einen von Neuron F empfangen.

Diese Beziehungen lassen sich als Paar darstellen, wie z.B. (B, A) , also "Das Neuron B kann Impulse zu Neuron A senden". Möchte man nun alle Beziehungen darstellen, so ist dies durch die Produktmenge $V \times V$ möglich, die alle 36 Paare anzeigt. Die jedoch tatsächlich existierenden Paare sind lediglich eine Teilmenge von $V \times V$. Diese Teilmenge wird mit R bezeichnet.⁹

$$R = (B, A); (D, A); (D, B); (C, B); (C, D); (C, E); (F, C); (F, D); (E, D); (E, F)$$

⁶auch Mengenprodukt genannt, erzeugt aus bereits gegebenen Mengen eine neue Menge

⁷die bereits gegebene Menge der Knoten

⁸vgl. Tittmann(2003)[16];S.128f, S.132

⁹vgl. Batschelet(2013)[1], S.55

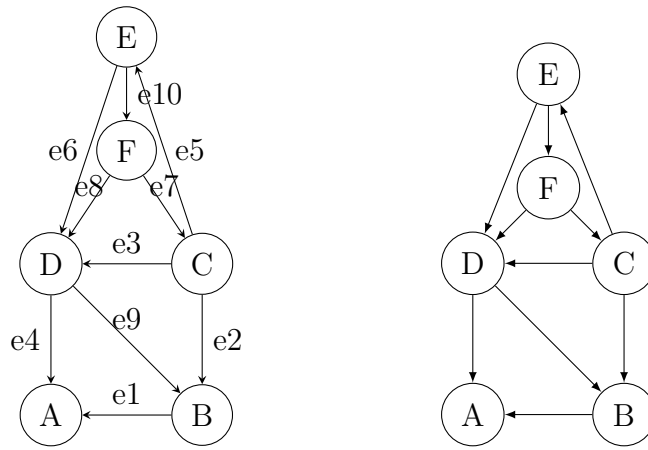


Abbildung 4: Graph zur Entsendung elektrischer Impulse zwischen Neuronen im Gehirn; mit und ohne beschriftete Kanten

Da alle Knoten in Verbindung miteinander stehen, wird dieser Graph als stark zusammenhängend bezeichnet. Doch was bedeutet das ?

3.2 Stark, schwach und nicht zusammenhängende Graphen

Es lässt sich zwischen stark, schwach und nicht zusammenhängenden Graphen unterscheiden. Ein Graph, der Knoten aufweist, die keine verbindende Kante haben, sind unzusammenhängend. Schwach zusammenhängende Graphen sind Modelle, die eine ungerichtete Kante zwischen zwei Knoten aufweisen. Stark zusammenhängend sind Graphen dann, wenn Knoten durch gerichtete Kanten verbunden sind.¹⁰

3.3 Gewichtete und ungewichtete Graphen

Zusätzlich zur Richtung der Kanten kann auch deren Gewichtung Einfluss auf die graphische Darstellung haben. Es wird unterschieden zwischen gewichteten und ungewichteten Graphen. Bei einem gewichteten Graphen erhält jede Kante ein sogenanntes Gewicht, was z.B. den unterschiedlichen Abstand zwischen zwei Orten oder die unterschiedlichen Kosten einer Reise angeben kann. Dies ist besonders bei Karten und Strecken ausschlaggebend.¹¹

Der Graph in Abbildung 5 hat die Kantengewichte 3, 2, 5 und 11. Der Weg von Knoten Z zu Knoten W hat höhere sogenannte Kosten, als der Weg von Z zu Y. $|ZW| = 11 > |ZY| = 2$. Diese zusätzliche Charakterisierung der Kanten kann Netzwerke detailreicher abbilden und lässt weitere Analyseschritte zu.

¹⁰vgl. Diestel(2006)[5],S.10f

¹¹vgl. Kruschke und Röpcke(2014)[10](S.29-32) und Knebl(2021)[8](S.253f)

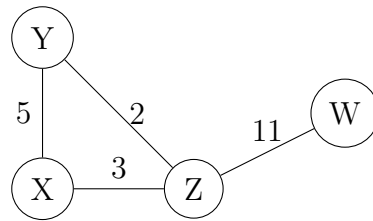


Abbildung 5: Gewichteter Graph

3.4 Pfade und Kreise

Pfade sind sogenannte Kantenfolgen. Sie beschreiben den Weg von einem Knoten v_1 über andere Knoten $v_2, \dots, v_{k-1}$ zu Knoten v_k . Dabei werden auch die Kanten $e_1, \dots, e_k$ notiert. Ein Beispiel für einen Pfad ist: v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 .

In der Graphentheorie ist ein Kreis ein Pfad, der zum Ausgangsknoten zurückführt und keine Kanten oder Knoten mehr als einmal durchläuft. Es ist also eine geschlossene Kantenfolge und der erste Knoten v_1 ist somit auch der letzte Knoten der Folge. Es gilt also $v_1 = v_k$, v_k steht hier für den letzten Knoten der Folge. Beispiel für eine geschlossene Kantenfolge ist $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1$. Ein Kreis kann auch als Zyklus bezeichnet werden. Es gibt verschiedene Arten von Kreisen in Graphen, wie zum Beispiel einfache Kreise, die keine Knoten oder Kanten doppelt durchlaufen, und gerichtete Kreise, die in einem gerichteten Graphen nur in eine Richtung durchlaufen werden können.¹²

Kreise können als Merkmal einem Graphen weitere Eigenschaften zuschreiben. **Im Beispielgraph** ZI befindet sich ebenfalls ein Kreis, ein gerichteter, zwischen den Knoten C, E und F. Die Folge ist also:

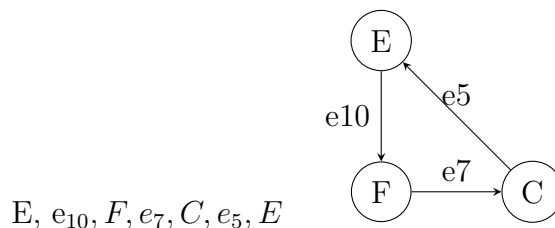


Abbildung 6: Kantenfolge und Kreis im als Teilgraph

3.5 Isomorphie in der Graphentheorie

In der Graphentheorie bedeutet Isomorphie, dass zwei Graphen die gleiche Struktur haben, aber möglicherweise unterschiedliche Beschriftungen ihrer Knoten und/oder Kanten besitzen. Formal ausgedrückt sind zwei Graphen G und H isomorph (geschrieben GH), wenn es eine bijektive Funktion f gibt, die jedem Knoten von G einen Knoten von H zuordnet und jeder Kante von G

¹²vgl. Diestel(1996)[5],S.10f und Krishke und Röpcke(2014)[10],S.21f

eine Kante von H zuordnet, so dass die Struktur der beiden Graphen erhalten bleibt. Die Isomorphie-Beziehung zwischen Graphen ist eine wichtige Konzept in der Graphentheorie, da sie es ermöglicht, die Strukturen von Graphen zu vergleichen und zu identifizieren, die auf den ersten Blick unterschiedlich aussehen mögen. Isomorphie ist auch ein wichtiges Werkzeug für die Entwicklung von Algorithmen, da sie es ermöglicht, Algorithmen für einen Graphen auf einen anderen Graphen zu übertragen, der isomorph zu ihm ist.¹³

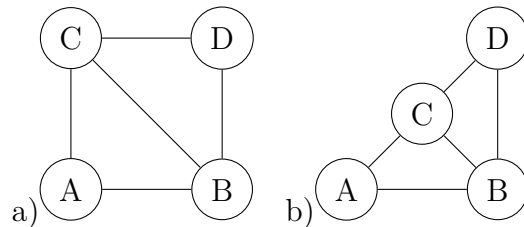


Abbildung 7: Zwei Graphen, die isomorph zueinander sind

Die Graphen a) und b) sind isomorph zueinander, denn man kann Knoten C so verschieben, dass die Graphen eindeutig deckungsgleich werden. $n = 4, m = 5$ also $G_a \cong G_b$

4 Knotengrad

Wichtig für die Darstellung von biologischen Relationen ist auch der sogenannte Knotengrad. Dieser sagt grundsätzlich aus, wie viele Kanten in einen Knoten ein- oder aus einem Knoten herausgehen. Der Knotengrad ist für die Analyse und Klassifizierung von Graphen ausschlaggebend. Der Grad eines Knotens ist jedoch unterschiedlich bei gerichteten und ungerichteten Graphen.

Hat ein Knoten einen Grad von 0, ist er ein isolierter Knoten.¹⁴

4.1 Knotengrad bei ungerichteten Graphen

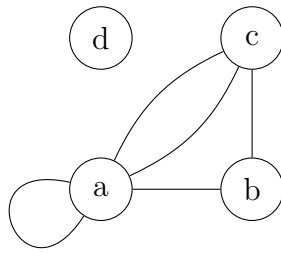
Im Falle eines ungerichteten Graphen beschreibt der Grad $d_G(b)$ eines Knotens b also lediglich die Anzahl $|E(b)|$ der mit Knoten b inzidenten¹⁵ Kanten. Da bei ungerichteten Graphen ohne Mehrfachkanten eine Kante immer mit dem einen Knoten b und dem Nachbarknoten c des Knotens b verbunden ist, ist der Knotengrad $d_G(b) = N_G(b)$ der Menge der Nachbarn von Knoten b . Bei Graphen mit Mehrfachkanten gilt dies jedoch nicht, wie es im Beispiel deutlich wird.¹⁶

¹³vgl. Tittmann(2003)[16],S.28

¹⁴vgl. Diestel(1996)[5],S.5f

¹⁵in Relation stehenden; eine Kante ist inzident zu einem Knoten, wenn sie verbunden sind

¹⁶vgl. Krishke und Röpcke(2014)[10],S.18-20



$$d(a) = 4, d(b) = 2, d(c) = 3, d(d) = 0$$

Abbildung 8: Graph mit Knotengraden

Der Minimalgrad eines Graphen ist $\delta(G) := \min[d(b) | b \in V]$ definiert und der Maximalgrad $\Delta(G) := \max[d(b) | b \in V]$. Der Durchschnittsgrad lässt sich folglich durch die Summe aller Grade geteilt durch die Anzahl aller Knoten berechnen.¹⁷

$$d(G) := \frac{\sum_{b \in V} d(b)}{|V|}$$

4.2 Knotengrad bei gerichteten Graphen

Bei gerichteten Graphen jedoch wird zwischen Eingangs- und Ausgangsgrad unterschieden, also wie viele Kanten in einen Knoten eingehen und wie viele von ihm ausgehen. Bei der Notierung des Grades wird zuerst der Eingangsgrad (E) und anschließend der Ausgangsgrad (A) eines Knoten (V) notiert. $d(V) = (E, A)$ Der Knotengrad kann daher als Klassifizierung besonderer Knoten fungieren. Ein Knoten ohne Eingangsgrad wird daher Quelle genannt und ein Knoten ohne Ausgangsgrad Senke. Als zentraler Knoten wird in vielen Zusammenhängen ein Knoten mit hohem Eingangsgrad bezeichnet. Dieser kann also eine bedeutendere Rolle in Netzwerken annehmen. Unwichtiger sind dann Knoten, die einen niedrigen Eingangsgrad haben, sogenannte periphere Knoten. Je nach Problemfrage lassen sich also Knoten nach dem Knotengrad kategorisieren.¹⁸

Beispiel Impulsübetragung zwischen Neuronen, Knotengrade

Auch bei der Darstellung der Neuronen lassen sich Knotengrade bestimmen. Diese zeigen die Wichtigkeit bestimmter Neuronen auf. Knoten A wird hier als Senke bezeichnet aufgrund des Ausgangsgrad 0. Knoten C hat den höchsten Ausgangsgrad und hat daher in der Impulsweiterleitung die größte Auswahl an Richtungen. Knoten D hat den höchsten Eingangsgrad und ist daher ein schwaches (lediglich schwach, da der Unterschied nicht verheerend ist) Zentrum

¹⁷vgl. Diestel(1996)[5],S.5 und Tittmann(2003)[16],S.14

¹⁸vgl. Diestel(1996)[5];S.15f, S.131

der elektrischen Impulse.

$$d(A) = (2, 0); d(B) = (2, 1); d(C) = (1, 3); d(D) = (3, 2); d(E) = (1, 2); d(F) = (1, 2)$$

5 Darstellung der Graphen in Matrizen

Um Graphen auch auf andere Art darzustellen, gibt es Matrizen, die dies ermöglichen. Durch sie wird der Fokus auf bestimmte Beziehungen gelegt.

5.1 Adjazenzmatrix und Adjazenzliste

Eine Adjazenzmatrix zeigt die Beziehungen zwischen den Knoten eines Graphen auf. Der Begriff adjazenz kommt vom lateinischen Verb *adiacere*, was "beiliegen" heißt. Diese Matrix fokussiert sich dementsprechend auf die Benachbarung der Knoten. Es ist eine Matrix, in der Knoten $n \times n$ dargestellt werden. Eine Adjazenzmatrix ist eine quadratische Matrix, die die Anzahl der Knoten des Graphen als Zeilen und Spalten hat. In der Matrix wird an der Position (A,B) eine 1 eingetragen, wenn es eine Kante vom Knoten A zum Knoten B gibt, ansonsten wird eine 0 eingetragen.¹⁹

Die Adjazenzmatrix ermöglicht eine schnelle Überprüfung, ob es eine Kante zwischen zwei Knoten gibt, da dies direkt in der Matrix abgelesen werden kann. Die Matrix kann auch zur Berechnung von Pfaden und zur Analyse der Eigenschaften des Graphen verwendet werden.

In einem **ungerichteten Graphen** ist die Adjazenzmatrix symmetrisch, da die Kanten zwischen den Knoten in beide Richtungen verlaufen.

In einem **gerichteten Graphen** kann die Adjazenzmatrix unsymmetrisch sein, da die Kanten nur in einer Richtung verlaufen können.

Eine alternative Darstellung eines Graphen ist die **Adjazenzliste**, die für jeden Knoten eine Liste der benachbarten Knoten enthält. Die Adjazenzliste benötigt in der Regel weniger Speicherplatz als die Adjazenzmatrix, da nur die Verbindungen zwischen den Knoten gespeichert werden müssen. Allerdings ist die Suche nach einer bestimmten Kante in der Adjazenzliste aufwändiger als in der Adjazenzmatrix.

¹⁹vgl. Tittmann(2003)[16],S.30

Beispiel: Elektrische Impulsübertragung zwischen Neuronen

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>						
<i>B</i>	1					
<i>C</i>		1		1	1	
<i>D</i>	1	1				
<i>E</i>				1		1
<i>F</i>			1	1		

Abbildung 9: Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen ZI (siehe 2 S.2)

5.2 Inzidenzmatrix und Inzidenzliste

In der Graphentheorie wird eine Inzidenzmatrix verwendet, um die Beziehungen zwischen Knoten und Kanten in einem Graphen darzustellen, welche Kante an welchem Knoten anliegt, der Fokus liegt abermals auf einer anderen Art der Beziehung. Eine Inzidenzmatrix ist eine rechteckige Matrix mit der Anzahl der Knoten als Zeilen und der Anzahl der Kanten als Spalten. In der Matrix wird an der Position (A, e_1) eine 1 eingetragen, wenn der Knoten A mit der Kante e_1 verbunden ist, ansonsten wird eine 0 eingetragen.²⁰

Im Gegensatz zur Adjazenzmatrix enthält die Inzidenzmatrix Informationen über die Verbindung zwischen Knoten und Kanten und nicht nur zwischen Knoten. Daher kann die Inzidenzmatrix verwendet werden, um verschiedene Arten von Graphen darzustellen, einschließlich gerichteter Graphen und Graphen mit Schleifen oder Mehrfachkanten.

Im Gegensatz zur Inzidenzmatrix, die die Beziehungen zwischen Knoten und Kanten in einem Graphen in einer Matrix darstellt, verwendet die **Inzidenzliste** eine Liste der Kanten und ihrer zugehörigen Knoten. Für jede Kante im Graphen wird in der Inzidenzliste eine Zeile erstellt, die die beiden Knoten enthält, die durch die Kante verbunden sind. Diese Zeile kann auch Informationen über das Gewicht oder andere Eigenschaften der Kante enthalten.

²⁰vgl. Tittmann(2003)[16], S.33

Beispiel: Elektrische Impulsübertragung zwischen Neuronen

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
A	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
B	1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
C	0	1	1	0	1	0	-1	0	0	0
D	0	0	-1	1	0	-1	0	-1	1	0
E	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1

Abbildung 10: Inzidenzmatrix des gerichteten Graph ZI (siehe 2 S.2)

6 Algorithmen

In der Graphentheorie gibt es viele Algorithmen, die verwendet werden, um Probleme im Zusammenhang mit Graphen zu lösen. Hier sind einige wichtige Algorithmen der Graphentheorie gelistet: Breitensuche, Tiefensuche, Greedy-Algorithmus, Dijkstra-Algorithmus, Kruskal-Algorithmus, Bellman-Ford-Algorithmus. Um einen Algorithmus anzuwenden, ist ein gewichteter Graph vorausgesetzt. Das Gewicht kann hier für Kilometeranzahlen zwischen zwei Orten oder für die Kosten einer Reise stehen.

Algorithmen werden zum Beispiel für die Berechnung kürzester oder günstigster Wege genutzt. Oder wie oft ein Knoten u durchkreuzt wird, wenn man vom Knoten v ausgeht. Auch in den Neurowissenschaften werden zur genaueren Erforschung und Analyse der neuronalen Netze Algorithmen angewandt.

6.1 Greedy-Algorithmus

Der Greedy(engl.: *gierig*)-Algorithmus ist der wohl bekannteste Algorithmus. Auf diesem basieren viele andere Algorithmen. Er liefert eine schnelle Lösung für den kürzesten Weg, aber häufig keine optimale Lösung, da er lediglich die aktuell am niedrigsten gewichtete Kante berücksichtigt und nicht den insgesamt kürzesten Weg.

Um diesen Algorithmus anwenden zu können, darf ein Graph keine negativen Gewichte aufweisen.²¹

²¹vgl. Horst(2012)[7], S.1

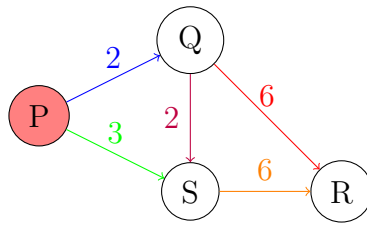


Abbildung 11: Gewichteter Graph mit Ausgangsknoten P

Der Greedy-Algorithmus bestimmt in dem in Abbildung 11 abgebildeten Graphen den Weg von Knoten P, dem Ausgangsknoten, zu Knoten R den Weg über die Knoten Q und S, also über die blaue, violette und orange Kante, als den kürzesten Weg, da er sich immer für die jeweils niedrigste gewichtete Kante entscheidet. Nach dem Greedy-Algorithmus ist $|PR| = |PQ| + |QS| + |SR| = 2 + 2 + 5 = 10$ der Kostenbetrag.

Jedoch ist schnell erkannt, dass dieser Weg zwar der aktuell schnellste Weg ist, aber nicht der insgesamt kürzeste Weg. $|PR| = |PQ| + |SR| = 2 + 6 = 8 < |PQ| + |QS| + |SR| = 10$. Auch der Weg über Knoten S zu Knoten R ist, nicht der kürzestete, aber dennoch kürzer. Zwar ist die grüne Kante höher gewichtet als die blaue Kante und scheint daher ungünstiger, jedoch ist die Summe der Gewichte der grünen Kante und der orangen Kante geringer, als die Summe der Gewichte der blauen, violetten und orangen Kante. Somit zeigt der Algorithmus schnell die aktuell optimale Lösung an, was für kurzfristige Probleme sinnvoll ist, liefert aber langfristig nicht die erwünschte Antwort.²² Für solche Art von Problemen eignet sich ein anderer Algorithmus besser.

6.2 Dijkstra-Algorithmus

Der Dijkstra-Algorithmus gehört zu der Klasse der Greedy-Algorithmen, ermittelt aber im Gegenteil zu diesem den insgesamt kürzesten Weg und liefert somit eine optimale Lösung. Um den Algorithmus des niederländischen Informatiker Edsger Dijkstra zu verwenden, ist es sinnvoll (besonders für komplexere Graphen als in Abbildung 11) diesen erst zu initialisieren. Zur Übersicht der Iterationen²³ wird eine Tabelle angelegt. Die Spalten werden hier mit der Anzahl der Iterationen und den Knoten betitelt. In den Zeilen werden dann in jeder Iteration die Kantengewichte, die typischerweise als Kosten bezeichnet werden, der Knoten und dessen Vorgänger eingetragen. In jeder Iteration werden ein Knoten und dessen direkte Nachfolger betrachtet.²⁴

Zuerst wird der Ausgangsknoten P betrachtet. Da er der Startpunkt ist, hat

²²vgl. Matzer und Litzel(2019)[11]

²³wiederholte Anwendung des gleichen Prozesses auf bereits gewonnene Zwischenwerte
Definition nach: Wörterbuch Oxford Languages

²⁴vgl. Krischke und Röpcke(2014)[10], S.56-60

Iteration		P	Q	R	S
0	Kosten	0	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-

Tabelle 1: Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11,
Iteration 0

er keine Vorgänger und keine Kosten. Dementsprechend wird für die Kosten eine 0 eingetragen. Die anderen Knoten erhalten zu Beginn Kosten von ∞ , da sie noch unbekannt sind.

In Iteration 1 werden nun die Nachfolger von P, die Knoten Q und S betrachtet.

Iteration		P	Q	R	S
0	Kosten	0	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-
1 <i>ausgewählt P</i>	Kosten	0	2	∞	3
	Vorgänger	-	P	-	P

Tabelle 2: Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11,
Iteration 1

Der Knoten Q erhält den Wert 2 als Kosten, da die blaue Kante ein Gewicht von 2 hat. $|PQ| = 2$ Der Vorgänger ist Knoten P. Auf gleiche Weise wird 3 als Kostenwert für Knoten S notiert und der Vorgänger ist ebenfalls P. $|PS| = 3$ In der 2. Iteration wird nun der Knoten Q betrachtet, da die Kosten dieses Knotens geringer sind als die von Knoten S. Da der kürzeste Weg gesucht wird, werden immer die niedrigsten Kosten betrachtet. Die Nachfolger von Knoten Q sind die Knoten S und R.

Iteration		P	Q	R	S
0	Kosten	0	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-
1 <i>ausgewählt P</i>	Kosten	0	2	∞	3
	Vorgänger	-	P	-	P
2 <i>ausgewählt Q</i>	Kosten	0	2	8	3
	Vorgänger	-	P	Q	P

Tabelle 3: Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11,
Iteration 2

Dem Knoten R werden hier die Kosten von 8 zugeordnet, da $|PR| = |PQ| + |QS| = 2 + 6 = 8$. In der 2. Iteration wird also die Summe der Kantengewichte eingetragen. Der Vorgänger zu Knoten R ist Knoten Q. Würde man nach diesem Schema weiter vorgehen, wären die Kosten für Knoten S 4 und der Vorgänger ist Knoten Q. Jedoch ist der direkte Weg von Knoten P zu Knoten S kürzer und die Kosten betragen lediglich 3 und somit bleibt die vorherige Notation aus Iteration 1 bestehen.

Da nun alle kürzesten Wege dargestellt sind, wird der Algorithmus abgebro-

chen. Nun lassen sich die kürzesten Wege rekursiv aus der Tabelle auslesen und es wird deutlich, dass der Weg, um vom Ausgangsknoten den Knoten R zu erreichen, $|PR| = |PQ| + |QR| = 8$ am kürzesten ist.²⁵

7 Arten von Graphen

Um Graphen zu ordnen und zu klassifizieren gibt es verschiedene Arten von Graphen. Im Folgenden sind einige Beispiele aufgelistet: Bipartiter Graph, Sterngraph, Baum, Wald, Digraph, Hypergraph, Planarer Graph und Multigraph. Da die Arten von Graphen im weiteren Verlauf keine große Rolle spielen, werden diese im begrenzten Umfang dieser Arbeit weitestgehend vernachlässigt.

Untergraph

Interessant für die Betrachtung verschiedener aus der Neurobiologie abstrahierter Graphen sind auch Untergraphen, die aus einer Teilmenge von Knoten und Kanten eines anderen Graphen gebildet wird. Mit anderen Worten, ein Untergraph ist ein Graph, der aus einem größeren Graphen herausgeschnitten wurde, indem eine Teilmenge seiner Knoten und Kanten entfernt wurde.²⁶

Beispiel: Elektrische Impulsübertragung zwischen Neuronen

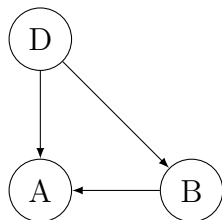


Abbildung 12: Teilgraph $ZI'=(I',N')$ von ZI (siehe oben: 2 S.2)

Als Untergraph der Verbindungen kann man z.B. lediglich die Teilmengen $V' = A, B, D$ und $E' = e_1, e_4, e_9$ betrachten und somit den Kreis ausschließen. So kann man sich bei der Analyse eines Netzwerkes auf einen spezifischen Teil fokussieren, wenn z.B. ein medizinischer Defekt an dieser Stelle auftritt.

²⁵vgl. Haftendorn(2019)[6], S.76-79 und Studyflix[15]

²⁶vgl. Diestel(1996)[5], S.4f

8 Graphentheorie anhand der Biologie der Nervenzelle im Gehirn

Das Gehirn besteht aus Milliarden von Neuronen, die miteinander durch synaptische Verknüpfungen verbunden sind. Die Wahrnehmungs- und Gedächtnisleistungen des menschlichen Gehirns entstehen durch das Zusammenspiel dieser Millionen von Nervenzellen. Für das Verständnis solcher Systeme erlangt die Mathematik eine immer größere Bedeutung. Anhand der Graphentheorie lässt sich dieses komplexe neuronale Netzwerk vereinfacht abbilden.

Durch diese Abstrahierung gelang es Hirnforschern, sich der Komplexität des zentralen Nervensystems anzunähern und diese als sogenanntes „Konnektom“ (Bezeichnung und Definition nach: Spektrum.de[13]) zu verbildlichen. Fragen wie: „Wie sind die Netzwerke im Gehirn organisiert? Wie verändern sich diese Netzwerke im Laufe der Zeit oder bei verschiedenen Zuständen? Wie hängen die Eigenschaften des Netzwerks mit der Funktion des Gehirns zusammen?“ konnten immer detailreicher beantwortet werden und es wird auch in Zukunft weiter darauf eingegangen.

Die Graphentheorie ist also hilfreich in der Darstellung und Analyse neurobiologischer Relationen. Bereits die Beispiele in Abschnitt 2, die sich zunächst näherungsweise mit diesen Beziehungen beschäftigt haben, beweisen diese These. Um die Abstrahierung der biologisch dargestellten Nervensysteme jedoch vollends zu begreifen, muss man den Aufbau und die Funktion einer Nervenzelle verstehen.

8.1 Aufbau und Funktion der Nervenzelle (Neuron)

Eine Nervenzelle, auch Neuron genannt, hat die Aufgabe einen elektrischen Impuls zu empfangen und weiterzusenden. Sie besteht aus einem **Zellkörper**, dem zahlreiche Fortsätze entspringen, **Dendriten** und einem oder mehreren **Axonen**.

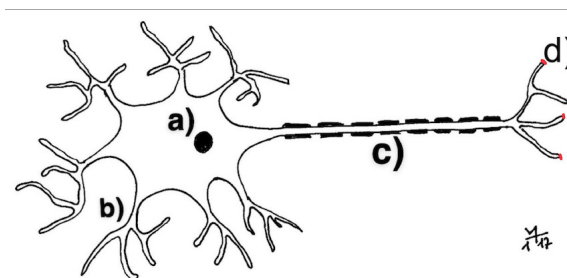


Abbildung 13: Grundbauplan einer Nervenzelle
a): Zellkörper b): Dendriten c): Axon d): Synapse

bearbeitet, URL = https://www.bio-nickl.de/wordpress/wp-content/uploads/2020/03/B802_Neuron_komplex.jpg

Die Dendriten sind häufig stark verästelt, während Axone einzelne Fortsätze darstellen mit einer möglichen Länge von 1 mm bis zu erstaunlichen 1 m. Ein Axon leitet die elektrischen Impulse schließlich vom Zellkörper weg bis zur **Synapse**. Die Synapse bildet eine Kontaktstelle zwischen einer Nervenzelle und einer anderen Nervenzelle oder einer Muskelzelle. Die „Lücke“ zwischen den Zellen wird als **synaptischer Spalt** bezeichnet, an den zwei verschiedene Membranbezirke angrenzen. Die **praesynaptische Membran**, die sich kurz vor dem Spalt befindet und die **postsynaptische Membran**, die sich direkt nach dem Spalt befindet.²⁷

8.2 Impulsübertragung

Die Nervenzellen übertragen Informationen mittels elektrischer Impulse, sogenannter **Aktionspotentiale**. „Überschreitet das elektrische Potenzial, das zwischen dem Inneren einer Nervenzelle und seiner Umgebung besteht, einen kritischen Schwellenwert, wird ein eine tausendstel Sekunde langer Impuls erzeugt.“ („Exotisches Feuerwerk im Gehirn“, MPG, Z.15ff)[17] Bei der Impulsübertragung gibt es zwei Arten der Übertragung, zwischen denen zu unterscheiden ist: die elektrische innerhalb der Nervenzellen und die chemische, synaptische Übertragung zwischen zwei Zellen.

Die Impulsübertragung beginnt, wenn ein Reiz auf die Nervenzelle einwirkt. Es tritt ein **Aktionspotenzial** auf und der elektrische Impuls verläuft durch die Zelle entlang des Axon zum synaptischen Spalt.

In der Synapse sorgt schließlich das einlaufende Aktionspotenzial für eine Depolarisierung der Membran. Aus den synaptischen Bläschen wird anschließend der Neurotransmitter freigesetzt und in den synaptischen Spalt ausgeschüttet. Durch Diffusion gelangt dieser Übertragungsstoff zu den Rezeptoren der postsynaptischen Membran und wird nach dem Schlüssel-Schloss-Prinzip²⁸ gebunden. In der empfangenden Nervenzelle führt dieser Vorgang zu einer Veränderung des elektrischen Potentials. Membrankanäle²⁹ werden geöffnet und Ionen können einströmen, die ein neues Aktionspotenzial verursachen. Somit ist der chemische Impuls wieder in einen elektrischen umgewandelt worden. Bei den Synapsen unterscheidet man zusätzlich zwischen zwei Grundtypen, der erregenden, der exzitatorischen, Synapse und der hemmenden, der inhibitorischen, Synapse.³⁰

²⁷vgl. Stratil, Ruppert und Kleinert(2010)[14],S.9f

²⁸Passgenauigkeit zweier oder mehrerer Strukturen

²⁹ Na^+ -, Ca^{2+} - oder Cl^- -Pumpen; Kanalproteine in der Membran

³⁰vgl. Stratil, Ruppert und Kleinert(2010)[14], S.13-25

8.3 Verschiedene Nervenzellentypen

Im Nervensystem des Gehirns gibt es verschiedene Typen von Nervenzellen, die sich in ihrem Aufbau und dementsprechend ihrer Funktion unterscheiden.

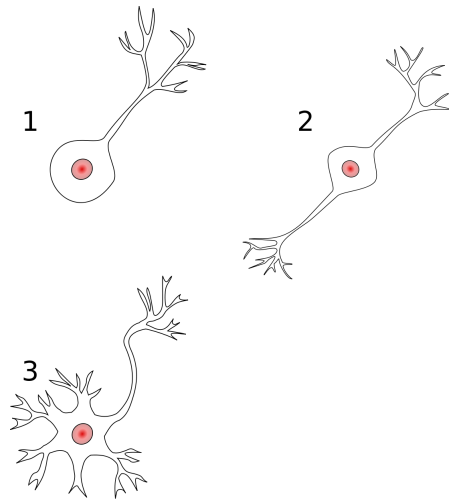


Abbildung 14: Verschiedene Nervenzellentypen

- 1) Unipolares Neuron
- 2) Bipolares Neuron
- 3) Multipolares Neuron

bearbeitet, URL = https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/92/Neurons_unipolarmultipseudouni.svg/1200px-Neurons_unipolarmultipseudouni.svg.png

In der Abbildung sind drei Typen gezeigt, die sich in der Anzahl ihrer Axon-Fortsätze unterscheiden.

- 1) Der erste Typ ist ein **unipolares Neuron**, das nur einen Fortsatz (Axon) hat. Typisch sind diese für Sehsinneszellen.
- 2) **Bipolare Neuronen** besitzen zwei Fortsätze. Sie sind z.B. im Gleichgewichtsorgan anzutreffen.
- 3) Die **multipolaren Neuronen** sind der häufigste Nervenzelltyp und befinden sich beispielsweise im Rückenmark. Sie besitzen eine Vielzahl an Dendriten und ein Axon.³¹

8.4 Graphische Darstellung der Impulsübertragung zwischen Nervenzellen

In der graphischen Darstellung wird nun die vollständige Nervenzelle - also Dendriten, Zellkörper und Axon - zum Knoten. Die Kante repräsentiert hier also den elektrischen Impuls zur Synapse der Nachbarnervenzelle und ist gerichtet, da dieser lediglich in eine Richtung verläuft.³²

³¹vgl. Bear, Connors und Paradiso(2018)[3], S.49f

³²vgl. Kree(2003)[9], S.4

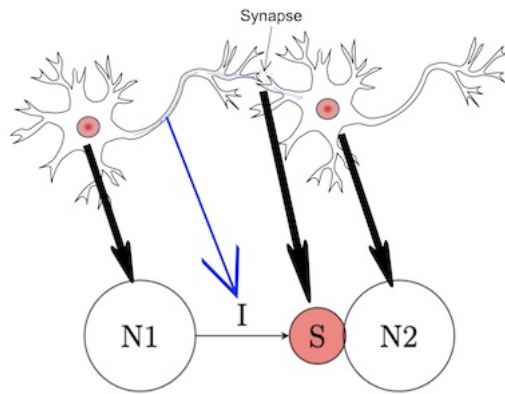


Abbildung 15: Abstrahierter Graph

N1,N2: Nervenzellen

S: Synapse

I: Elektrischer Impuls

eigene Graphendarstellung mit Ausschnitten aus Abb.15

Neuron 1 sendet elektrische Impulse zur Synapse von Neuron 2.

Diese Abstrahierung von Graphen wird nun auch genutzt, um diese Netzwerke genauer zu untersuchen. Welches Neuron entsendet welchen Impuls und welcher elektrische Impuls hat einen kürzeren Weg als ein anderer? Durch die Analyse von Aktionspotentialen können Forscher Antworten auf diese Fragen finden und somit ein tieferes Verständnis für die Funktionsweise des Gehirns erlangen. Diese Analyse wird auf hochkomplexe Art von Neurologen durchgeführt. „Ein Team von Wissenschaftlern des Max-Planck-Instituts für Dynamik und Selbstorganisation, der Universität Göttingen und des Bernstein Center for Computational Neuroscience Göttingen hat nun eine Methode entwickelt, mit der sich neuronale Schaltpläne entschlüsseln lassen.“ („Ein Blick auf den Schaltplan des Gehirns“, Max-Planck-Gesellschaft, (Z.2-5))[12] In stark vereinfachter Art werde ich ein Verfahren, das dem der Neurowissenschaftler in den Grundannahmen ähnelt, darstellen und erläutern. Einen Graph direkt aus der Gewebestruktur herzuleiten, sei aber unmöglich, daher ist eine andere Methode gefunden worden die Aktivitäten der Neuronen aufzuzeichnen (vgl. „Ein Blick auf den Schaltplan des Gehirns“, Max-Planck-Gesellschaft, (Z.13ff))[12]. Mithilfe einer Kalzium-Fluoreszenz-Messung lässt sich ein Graph aus der gleichzeitigen Aufzeichnung von Neuronen abstrahieren. Da bei der Erregungsübertragung an der Synapse auch Kalzium-Ionen vorhanden sind, wird ein Bild gegeben.³³

Anhand dieser Bildgebung wird zwar deutlich, welches Neuron gerade aktiv ist, aber nicht, ob der Verbindungsweg eines elektrischen Impulses zwischen Neuronen direkt ist oder über mehrere Neuronen verteilt. Daher entwickelte ein neurowissenschaftliches Team unter dem Neurologen Theo Geisel einen Al-

³³vgl Max-Planck-Gesellschaft(2012)[12]



Abbildung 16: Bildgebend der Kalzium-Fluoreszenz-Messung (links) und die Abstrahierung des Netzwerks (rechts)

Abbildung der Max-Planck-Gesellschaft[12]

gorithmus, der sich mit dieser Fragestellung beschäftigt und Antworten über den Aufbau des Nervensystems gibt.(vgl. „Ein Blick auf den Schaltplan des Gehirns“, MPG[12], (Z.21))

Im Folgenden abstrahiere ich einen Ausschnitt des Nervensystems als theoretischen Graphen. Dieser ist gewichtet, da zusätzlich zu den Verbindungen

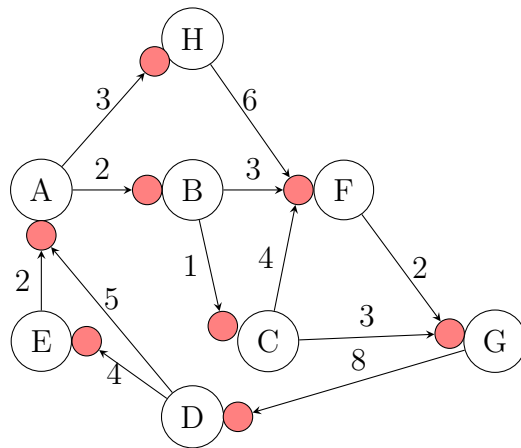


Abbildung 17: Abstrahierter Graph $Z = (I, N)$

auch die Strecke bzw. Zeit, die ein elektrischer Impuls zurücklegt, dargestellt wird. Der Graph $Z = (I, N)$ weist also die Kanten $i_1, \dots, i_{12}$ auf und die Knoten $A, \dots, H$. Die Menge I und die Menge N . Die Kantengewichte sind ohne Grundlage von Daten zur rein hypothetischen Veranschaulichung gewählt. Sie spiegeln die Strecke, die ein Impuls zurücklegen muss, wieder. Entsendet Neuron A einen Impuls zur Synapse des Neurons H, legt der elektrische Impuls in dieser Darstellung eine Strecke von 3 zurück.

Auf diesen Graphen lassen sich nun Algorithmen anwenden, um herauszufinden, welche Kanten der elektrische Impuls nutzt und über welche Knoten, um einen möglichst kurzen Weg durchzuführen.

8.5 Anwendung des Dijkstra-Algorithmus am Netzwerk der Neuronen

„Stellen Sie sich das menschliche Gehirn als ein Flughafen-Netzwerk vor. Welche Verbindung ist dann die schnellste von Münster nach Sydney? Und wo sind die Knotenpunkte? Genau solche Überlegungen sind auch für den Aufbau des Gehirns relevant.“ (Dr. Jonathan Repple in „News“ der Medizinischen Fakultät Münster[2] Z.1-6) Denn anhand von Algorithmen lässt sich durch die Berechnung schnellster Wege die Wahrscheinlichkeit eines Signals eines bestimmten Neurons, ein Impulspotenzial in einem anderen Neuron zu aktivieren, ermitteln. Umso kürzer der Weg, desto höher die Wahrscheinlichkeit der Auslösung eines Aktionspotenzials.

Es wird die Nervenzelle A als Ausgangsknoten gewählt und nun berechnet, wie wahrscheinlich es ist, dass Nervenzelle A in einer anderen Nervenzelle ein Aktionspotenzial auslöst.

Hierzu verwende ich den Dijkstra-Algorithmus, da er nicht nur, wie der Greedy-Algorithmus, den nächstkürzesten Weg wählt, sondern den insgesamt kürzesten Weg ermittelt. (siehe 6 S. 10) Zunächst wird der Algorithmus initialisiert. Zur Veranschaulichung und Übersicht hilft hier eine Tabelle. Hierbei werden Iterationen, wie bereits erklärt (siehe 6 S.10), angewandt.³⁴

Iteration		A	B	C	D	E	F	G	H
0	Kosten	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelle 4: Initialisierung des Algorithmus, Iteration 0

Die Kosten bis zum Startknoten A betragen 0 und da es der Ausgangspunkt ist, gibt es keinen Vorgänger. Da die Wege zu den anderen Nervenzellen zunächst unbekannt sind, wird für die Kosten der anderen Knoten ein ∞ -Zeichen eingetragen. Anschließend betrachtet man die Nachbarn des Knoten A: Knoten B und H. Die Kosten von Knoten A zu B betragen 2 und die Kosten

Iteration		A	B	C	D	E	F	G	H
0	Kosten	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-	-	-	-	-
1 <i>ausgewählt: A</i>	Kosten	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	3
	Vorgänger	-	A	-	-	-	-	-	A

Tabelle 5: Initialisierung des Algorithmus, Iteration 1

zu Knoten H 3. Zusätzlich wird bei Knoten B und H der Vorgänger gelistet, Knoten A.

³⁴vgl. studyflix[15]

Für Iteration 2 wählt man anschließend den Nachfolger mit den geringsten Kosten aus, hier Knoten B. Nun betrachtet man die Nachfolger von B, also Knoten C und F. Die Kosten werden hier als Summe von Weg $|AB| + |BNachfolger|$

Iteration		A	B	C	D	E	F	G	H
0	Kosten	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-	-	-	-	-
1	Kosten	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	3
<i>ausgewählt: A</i>	Vorgänger	-	A	-	-	-	-	-	A
2	Kosten	0	2	3	∞	∞	5	∞	3
<i>ausgewählt: B</i>	Vorgänger	-	A	B	-	-	B	-	A

Tabelle 6: Initialisierung des Algorithmus, Iteration 2

eingetragen. Für den Nachfolgerknoten C betragen die Kosten daher 3, weil $|AB| + |BC| = 2 + 1 = 3$. Und für Knoten F 5, da $|AB| + |BF| = 2 + 3 = 5$. Wieder B als Vorgängerknoten eingetragen.

Initialisiert man den Algorithmus in diesem Schema weiter, erhält man schließlich eine vollständige Tabelle und der Algorithmus wird abgebrochen. Nun wird

Iteration		A	B	C	D	E	F	G	H
0	Kosten	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	Vorgänger	-	-	-	-	-	-	-	-
1	Kosten	0	2	∞	∞	∞	∞	∞	3
<i>ausgewählt: A</i>	Vorgänger	-	A	-	-	-	-	-	A
2	Kosten	0	2	3	∞	∞	5	∞	3
<i>ausgewählt: B</i>	Vorgänger	-	A	B	-	-	B	-	A
3	Kosten	0	2	3	∞	∞	5	6	3
<i>ausgewählt: C</i>	Vorgänger	-	A	B	-	-	B	C	A
4	Kosten	0	2	3	14	∞	5	6	3
<i>ausgewählt: G</i>	Vorgänger	-	A	B	G	-	B	C	A
5	Kosten	0	2	3	14	18	5	6	3
<i>ausgewählt: D</i>	Vorgänger	-	A	B	G	G	B	C	A

Tabelle 7: Initialisierung des Algorithmus, Iteration 3

die Tabelle rekursiv gelesen und es kann der kürzeste Weg von Knoten A zu Knoten E bestimmt werden. Die Gesamtkosten betragen 18 und der kürzeste Weg erfolgt über die Knoten A, B, C, G und D. $|AE| = |AB| + |BC| + |CG| + |GD| + |DE| = 18$

Auf den biologischen Sachverhalt übertragen hat diese Tabelle also Aussagekraft über die wahrscheinlichsten Wege der elektrischen Impulse. Das Neuron A entsendet am wahrscheinlichsten einen Impuls zu Neuron E, indem es zunächst Neuron B, C, G und D induziert. Die Wissenschaftler haben somit einen wichtigen Schritt in Richtung Verständnis der neuronalen Kommunikation gemacht. Dieses Wissen kann dazu beitragen, Krankheiten wie Parkinson oder Alzheimer besser zu verstehen und möglicherweise neue Therapiemöglichkeiten zu entwickeln.

9 Fazit

Anhand dieser Erarbeitung lässt sich die Frage, inwiefern und ob die Graphentheorie sinnvolle Anwendung in der Neurobiologie findet, gut beantworten. Die Graphentheorie dient nicht nur zur reinen Veranschaulichung der hohen Komplexität der zentralen Nervensysteme im Gehirn, sondern hilft auch bei der Analyse dieser. Durch diese mathematische Methode gelingt es, neue Kenntnisse über das Gehirn, dessen Funktion und Aufbau, zu gewinnen. Es können verschiedene Netzwerkparameter berechnet werden, wie zum Beispiel die Dichte des Netzwerks, die Stärke der Verbindungen zwischen den Neuronen oder die Effizienz der Informationsübertragung im Netzwerk. (vgl. „Exotisches Feuerwerk im Gehirn“ [17] und „Ein Blick auf den Schaltplan des Gehirns“ [12], MPG)

Durch die Anwendung der Graphentheorie in der Neurobiologie kann besser verstanden werden, wie neuronale Netzwerke Informationen verarbeiten und speichern, wie sie sich während der Entwicklung im Alter verändern und wie sie durch Krankheit oder Verletzung beeinflusst werden können. Die Graphentheorie hat auch zu Fortschritten in der Diagnose und Behandlung von neurologischen Erkrankungen wie Alzheimer und Parkinson beigetragen. Es lassen sich durch die Zurückführung des Fehlers im Nervensystem sowohl psychische, als auch physische Krankheitsbilder diagnostizieren. Neue Studien ergaben sogar, dass „psychische Erkrankungen ähnliche Hirnveränderungen aufweisen wie neurologische Krankheiten, nämlich defekte Verbindungswege“ (News der Medizinischen Fakultät Münster, Z.49f) [2], was anhand von Isomorphismen festgestellt wurde.

Durch die eigene Verwendung von Algorithmen, Charakterisierungen und Berechnungen anhand der abstrahierten Graphen der Nervensysteme in Kapitel 8 und die Beispiele des Graphen *ZI* wird die Nützlichkeit dieses mathematischen Teilgebiets deutlich.

Zusammengefasst bietet die Graphentheorie eine große Hilfe in der Anwendung der Darstellung und Analyse neuronaler Netzwerke. Durch verschiedene Eigenschaften und Operationen lassen sich neue Kenntnisse formen und das Gehirn als komplexes Organ kann zunehmend besser verstanden werden.

Literatur

- [1] Edward Batschelet. *Einführung in die Mathematik für Biologen*. Springer-Verlag, 2013.
- [2] Dr. Thomas Bauer. *Neurologische und psychiatrische Krankheiten zeigen ähnliche „Verbindungsfehler“: Studie bringt wichtige Erkenntnisse für Hirnforschung*. 28.08.2019. URL: https://www.medizin.uni-muenster.de/fakultaet/news/neue_studie_wendet_graphentheorie-analyse_auf_konnektivitaet_der_nervenzellen_im_hirn_an.html.
- [3] Mark F Bear, Barry W Connors und Michael A Paradiso. *Neurowissenschaften: Ein grundlegendes Lehrbuch für Biologie, Medizin und Psychologie*. Springer-Verlag, 2018.
- [4] Reinhard Diestel. „Extremal graph theory“. In: *Graph theory* (2017), S. 173–207.
- [5] Reinhard Diestel. „Graphentheorie (Elektronische Ausgabe 2006)“. In: *Springer-Verlag Heidelberg 2000* (1996), S. 2006.
- [6] Dörte Haftendorn. *Mathematik sehen und verstehen: Werkzeug des Denkens und Schlüssel zur Welt*. Springer-Verlag, 2019.
- [7] Christoph Horst. *Der Greedy-Algorithmus und unendliche Matroide*. Paderborn, 25. September 2012.
- [8] Helmut Knebl. „Gewichtete Graphen“. In: *Algorithmen und Datenstrukturen: Grundlagen und probabilistische Methoden für den Entwurf und die Analyse* (2021), S. 253–318.
- [9] Prof. Dr. Reiner Kree. „Schwarze Kästen, Moleküle und Gedanken - Die Balance zwischen Theorie und Experiment“. In: *Gerogia Augusta: Gehirn und Verstehen* 1 (2003), S. 23–28.
- [10] André Krischke und Helge Röpeke. *Graphen und Netzwerktheorie: Grundlagen-Methoden-Anwendungen*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2014.
- [11] Michael Matzer und Nico Litzel. *Der Greedy-Algorithmus*. 5. August 2019. URL: <https://www.bigdata-insider.de/der-greedy-algorithmus-a-843043/>. (zuletzt abgerufen: 22.03.2023).
- [12] Max-Planck-Gesellschaft. *Ein Blick auf den Schaltplan des Gehirns*. 8. Oktober 2012. URL: https://www.mpg.de/6374762/nervenzellen_algorithmus. (zuletzt abgerufen: 22.03.2023).
- [13] Spektrum. *Konnektom*. URL: <https://www.spektrum.de/thema/konnektom/1071725>. (zuletzt abgerufen: 19.03.2023).
- [14] Franz X. Stratil, Wolfgang Ruppert und Reiner Kleinert. *Mehr Erfolg in Biologie - Nerven, Sinne, Zellen*. mentor, 5. Oktober 2010.

- [15] studyflix. *Dijkstra-Algorithmus*. URL: <https://studyflix.de/informatik/dijkstra-algorithmus-1291>. (zuletzt abgerufen: 22.03.2023).
- [16] Peter Tittmann. *Graphentheorie*. Bd. 2. Hanser Fachbuchverlag, 2003.
- [17] Dr. Fred Wolf. *Exotisches Feuerwerk im Gehirn - Max-Planck-Forscher entdecken neuartige mathematische Objekte in Modellen neuronaler Netzwerke*. 13. Januar 2003. URL: <https://www.mpg.de/475786/pressemitteilung20030113>.

Abbildungsverzeichnis

1	Drei Beispiele für Graphen	1
2	Erste graphische Annäherung an die Entsendung elektrischer Impulse zwischen Neuronen im Gehirn	2
3	Gerichteter (a) und ungerichteter (b) Graph	3
4	Graph zur Entsendung elektrischer Impulse zwischen Neuronen im Gehirn; mit und ohne beschriftete Kanten	4
5	Gewichteter Graph	5
6	Kantenfolge und Kreis im als Teilgraph	5
7	Zwei Graphen, die isomorph zueinander sind	6
8	Graph mit Knotengraden	7
9	Adjazenzmatrix des gerichteten Graphen ZI (siehe 2 S.2)	9
10	Inzidenzmatrix des gerichteten Graph ZI (siehe 2 S.2)	10
11	Gewichteter Graph mit Ausgangsknoten P	11
12	Teilgraph $ZI'=(I',N')$ von ZI (siehe oben: 2 S.2)	13
13	Grundbauplan einer Nervenzelle a): Zellkörper b): Dendriten c): Axon d): Synapse bearbeitet, URL = https://www.bio-nickl.de/wordpress/wp-content/uploads/2020/03/B802_Neuron_komplex.jpg	14
14	Verschiedene Nervenzellentypen 1) Unipolares Neuron 2) Bipolares Neuron 3) Multipolares Neuron bearbeitet, URL = https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/92/Neurons_unipolarmultipseudouni.svg/1200px-Neurons_unipolarmultipseudouni.svg.png	16
15	Abstrahierter Graph N_1, N_2 : Nervenzellen S: Synapse I: Elektrischer Impuls eigene Graphendarstellung mit Ausschnitten aus Abb.15	17
16	Bildgebund der Kalzium-Fluoreszenz-Messung (links) und die Abstrahierung des Netzwerks (rechts) Abbildung der Max-Planck-Gesellschaft[12]	18

17	Abstrahierter Graph $Z = (I, N)$	18
----	--	----

Tabellenverzeichnis

1	Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11, Iteration 0	12
2	Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11, Iteration 1	12
3	Initialisierung des Algorithmus zum Graphen in Abb. 11, Iteration 2	12
4	Initialisierung des Algorithmus, Iteration 0	19
5	Initialisierung des Algorithmus, Iteration 1	19
6	Initialisierung des Algorithmus, Iteration 2	20
7	Initialisierung des Algorithmus, Iteration 3	20

Versicherung zur selbstständigen Arbeit

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe. [Verwendete Informationen aus dem Internet sind dem(r) Lehrer/in vollständig ausgedruckt in einem separaten Ordner zur Verfügung gestellt worden.] je nach Absprache

Leer, den 24.03.2023
(Ort, Datum)

Lilith Schüler

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 24.03.2023
(Ort, Datum)

Lilith Schüler