

Untersuchung fraktaler Kurven und fraktaler Mengen

Arne Koenen

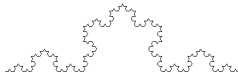
Ubbo-Emmius-Gymnasium Leer

Fraktale Kurven

Wie lang ist die Küstenlinie von Großbritannien?



Küstenlinie in verschiedenen Maßstäben gemessen



Bildung der Koch-Kurve

Umfang der Koch-Kurve

$$L_1 = 1LE + \frac{1}{3}LE = \frac{4}{3}LE$$

Umfang der Koch-Kurve

$$L_1 = 1LE + \frac{1}{3}LE = \frac{4}{3}LE$$

$$L_2 = \frac{4}{3}LE \cdot \frac{4}{3}LE = \left(\frac{4}{3}\right)^2 LE$$

Umfang der Koch-Kurve

$$L_1 = 1LE + \frac{1}{3}LE = \frac{4}{3}LE$$

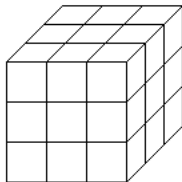
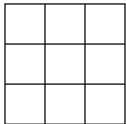
$$L_2 = \frac{4}{3}LE \cdot \frac{4}{3}LE = \left(\frac{4}{3}\right)^2 LE$$

...

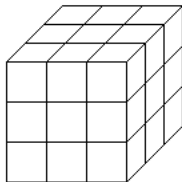
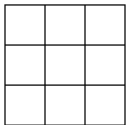
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Mathematisch gesehen wird die Küstenlinie also unendlich lang, wenn sie genau bestimmt wird.

Fraktale Dimensionen

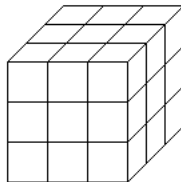
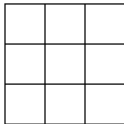


Fraktale Dimensionen



$$n = 3$$

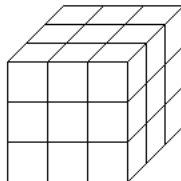
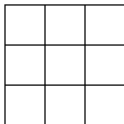
Fraktale Dimensionen



$$n = 3$$

$$k = 9(\text{Quadrat}), k = 27(\text{Würfel})$$

Fraktale Dimensionen



$$n = 3$$

$$k = 9(\text{Quadrat}), k = 27(\text{Würfel})$$

$$k = n^D$$





$$k = n^D \iff D = \frac{\log k}{\log n}$$



$$k = n^D \iff D = \frac{\log k}{\log n}$$

$$n = 3$$



$$k = n^D \iff D = \frac{\log k}{\log n}$$

$$n = 3$$

$$k = 4$$



$$k = n^D \iff D = \frac{\log k}{\log n}$$

$$n = 3$$

$$k = 4$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619$$

Fraktale Mengen

Komplexe Zahlen: Quadrierung

► $i^2 = -1$

Fraktale Mengen

Komplexe Zahlen: Quadrierung

► $i^2 = -1$

► Beispiel: $c = 2 + 3 \cdot i$

Fraktale Mengen

Komplexe Zahlen: Quadrierung

► $i^2 = -1$

► Beispiel: $c = 2 + 3 \cdot i$

$$c^2 = (2 + 3 \cdot i) \cdot (2 + 3 \cdot i)$$

$$c^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i + 3^2 \cdot i^2$$

$$c^2 = 4 + 12i - 9$$

$$c^2 = -5 + 12i$$

Fraktale Mengen

Komplexe Zahlen: Quadrierung

► $i^2 = -1$

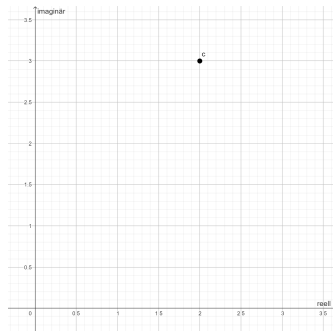
► Beispiel: $c = 2 + 3 \cdot i$

$$c^2 = (2 + 3 \cdot i) \cdot (2 + 3 \cdot i)$$

$$c^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot i + 3^2 \cdot i^2$$

$$c^2 = 4 + 12i - 9$$

$$c^2 = -5 + 12i$$



Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

- ▶ bleibt z_n beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

- ▶ bleibt z_n beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge
- ▶ konkret: $|z_n| < 2$

Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

- ▶ bleibt z_n beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge
- ▶ konkret: $|z_n| < 2$

Darstellung auf der gaußschen Zahlenebene:

Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

- ▶ bleibt z_n beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge
- ▶ konkret: $|z_n| < 2$

Darstellung auf der gaußschen Zahlenebene:

- ▶ Jedes c , das zur Mandelbrot-Menge gehört, wird schwarz gefärbt

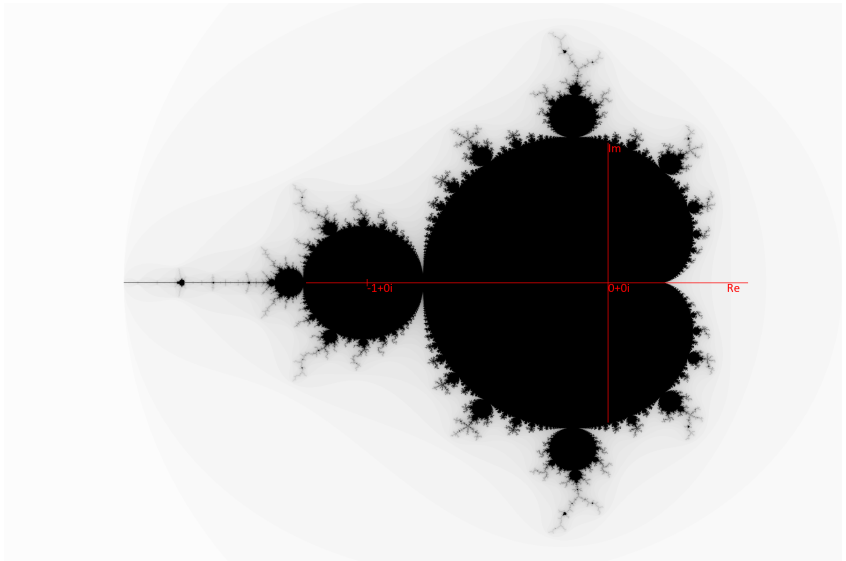
Die Mandelbrot-Menge

$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c, c \in \mathbb{C}, z_0 = 0$$

- ▶ bleibt z_n beschränkt, gehört c zur Mandelbrot-Menge
- ▶ konkret: $|z_n| < 2$

Darstellung auf der gaußschen Zahlenebene:

- ▶ Jedes c , das zur Mandelbrot-Menge gehört, wird schwarz gefärbt
- ▶ Jedes c , das nicht zur Mandelbrot-Menge gehört, wird weiß gefärbt

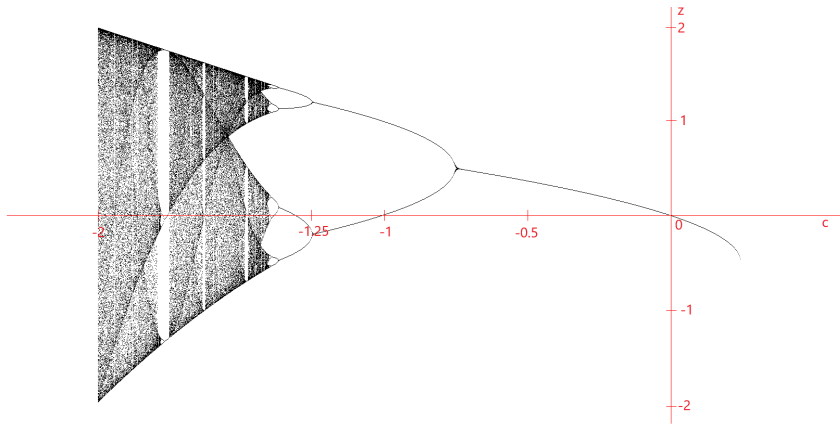


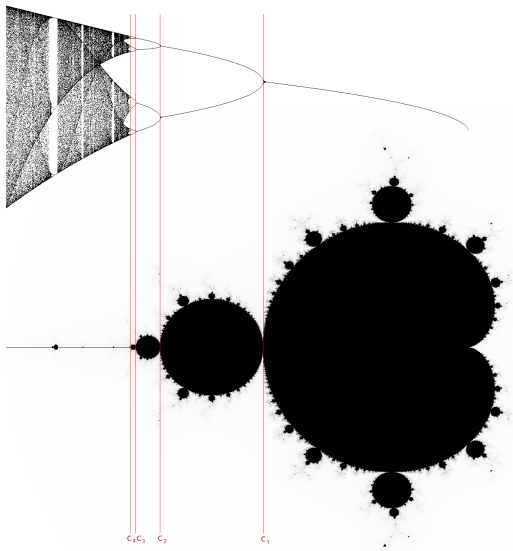
Das „Apfelmännchen“

Zoom in die Mandelbrot-Menge: <https://www.youtube.com/watch?v=b005iHf8Z3g>

Das Feigenbaumdiagramm

Iteration	$c = -0.5$	$c = -1$	$c = -1.25$	$c = -1.95$
0	-0.5	-1	-1.25	-1.95
1	-0.25	0	0.312	1.852
2	-0.438	-1	-1.152	1.482
3	-0.309	0	0.078	0.246
4	-0.405	-1	-1.244	-1.89
5	-0.336	0	0.297	1.621
...				
93	-0.366	0	0.245	-1.242
94	-0.366	-1	-1.19	-0.409
95	-0.366	0	0.166	-1.783
96	-0.366	-1	-1.222	1.229
97	-0.366	0	0.244	-0.439
98	-0.366	-1	-1.19	-1.758
99	-0.366	0	0.167	1.139
100	-0.366	-1	-1.222	-0.652





Die Feigenbaumkonstante

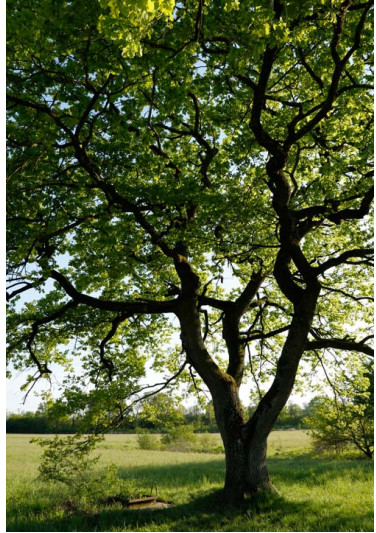
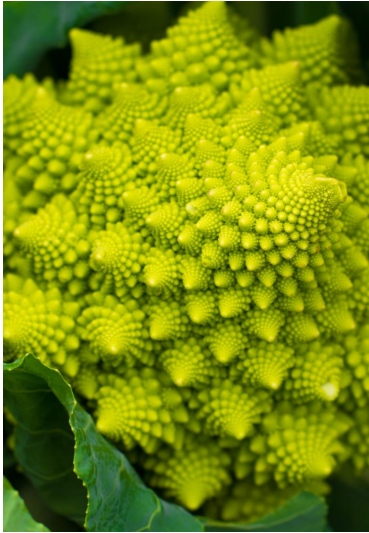
c	Perioden	$\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{c_n - c_{n-1}}$
$c_1 = -0.750$	2	-
$c_2 = -1.250$	4	-
$c_3 = -1.368$	8	4.2337
$c_4 = -1.394$	16	4.5515
$c_5 = -1.399$	32	4.6459

Die Feigenbaumkonstante

c	Perioden	$\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{c_n - c_{n-1}}$
$c_1 = -0.750$	2	-
$c_2 = -1.250$	4	-
$c_3 = -1.368$	8	4.2337
$c_4 = -1.394$	16	4.5515
$c_5 = -1.399$	32	4.6459

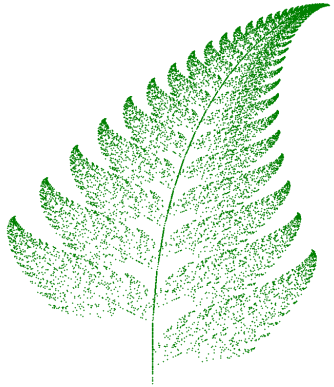
$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{c_n - c_{n-1}} \approx 4.6692016091$$

Fraktale in der Natur





Farnblatt



Barnsley-Farn



Quellen der Abbildungen

Küstenlinien:

Bild1: <https://steemit.com/science/@sammy111100/fraktale-grossbritannienens-kuestenlinie>

Farnblatt:

<https://de.dreamstime.com/stockbild-farnblatt-image14889101>

Romanesco:

<https://www.plantura.garden/gemuese/romanesco/romanesco-pflanzenportrait>

Baum:

<https://www.baumpflegeportal.de/aktuell/starke-baumtypen-baum-seidengewand/>

Wolken:

<https://sciencing.com/cumulus-clouds-made-up-8551751.html>

Blitze:

<https://science.howstuffworks.com/nature/natural-disasters/lightning.htm>