Sphärische Geometrie

und ihre Anwendungen in der Navigation

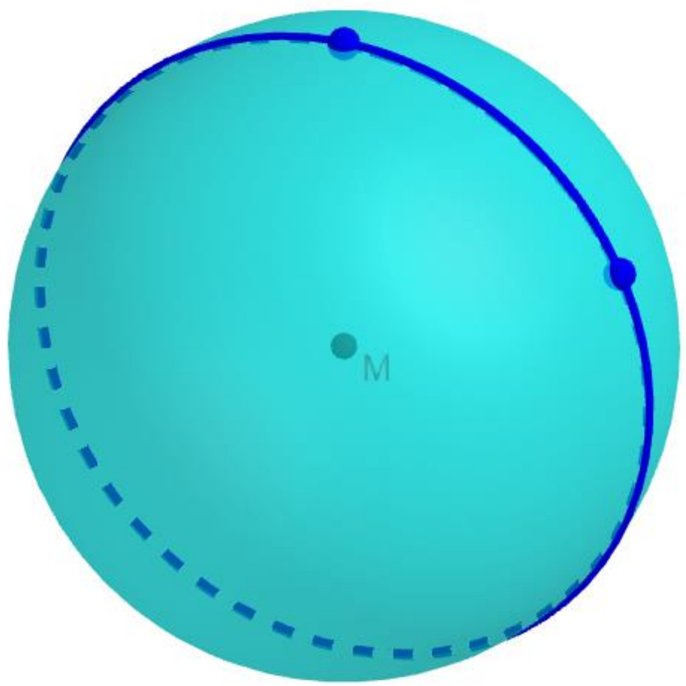
Vergleich mit der euklidischen Geometrie

Euklidische Geometrie

Gerade

Sphärische Geometrie

Hauptkreis

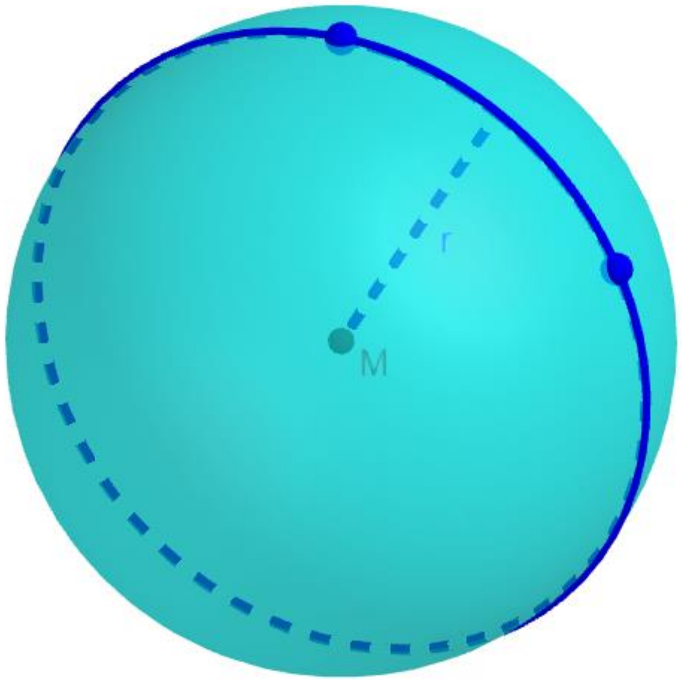


Euklidische Geometrie

Gerade

Sphärische Geometrie

Hauptkreis



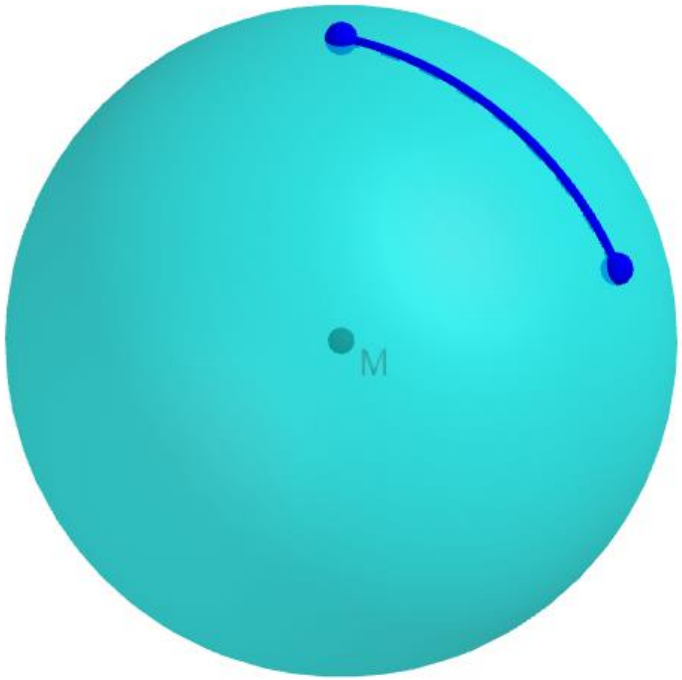
→Länge: $2\pi r$

Euklidische Geometrie

Strecke

Sphärische Geometrie

Hauptkreisbogen



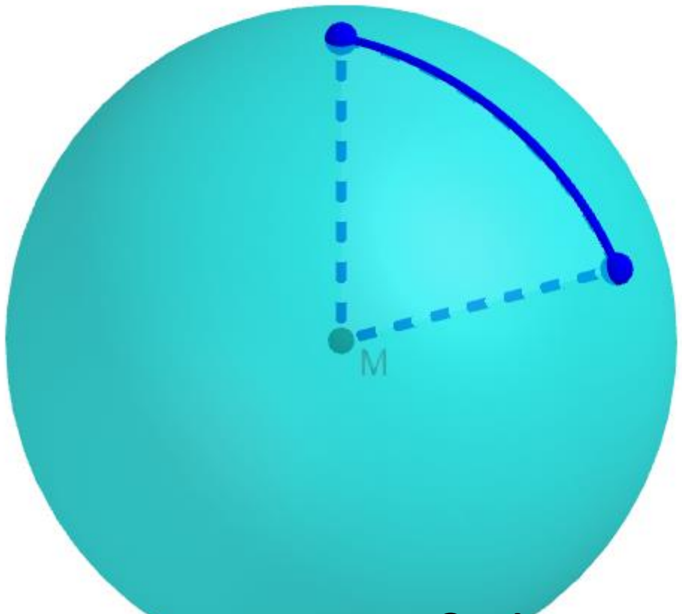
→Sphärische Distanz

Euklidische Geometrie

Strecke

Sphärische Geometrie

Hauptkreisbogen



→Länge: Bogenmaß des Mittelwinkels

Parallelenproblem

Euklids 5 Postulate

1. Je zwei Punkte können durch eine Strecke verbunden werden.
2. …
3. …
4. …
5. Zu einer Gerade gibt es durch einen beliebigen Punkt P eine Parallele.

Euklids 5 Postulate in der sphärischen Geometrie

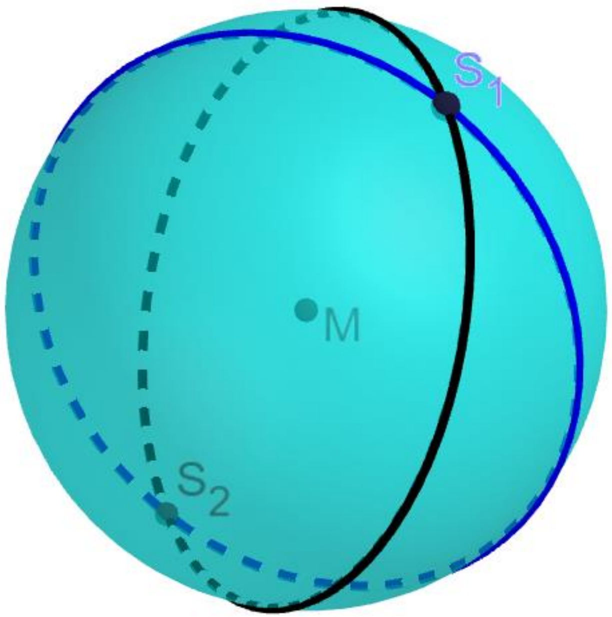
1. Je zwei Punkte können durch eine Strecke verbunden werden.
2. …
3. …
4. …
5. ~~Zu einer Gerade gibt es durch einen beliebigen Punkt P eine Parallele.~~

Euklids 5 Postulate in der sphärischen Geometrie

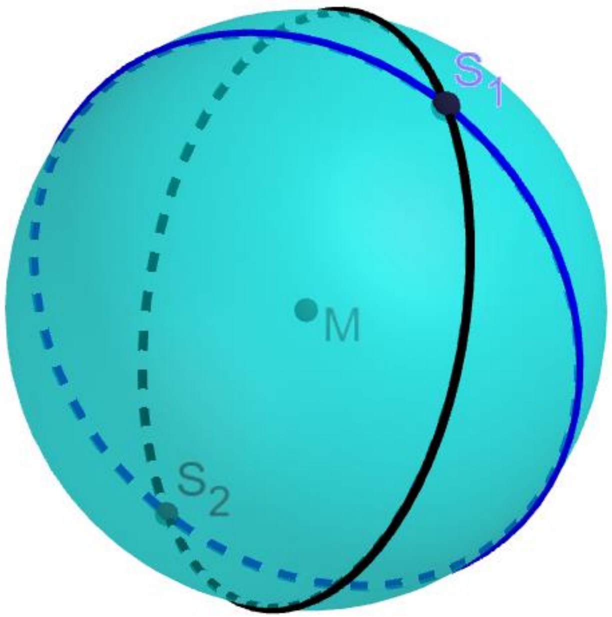
1. Je zwei Punkte können durch eine Strecke verbunden werden.
2. …
3. …
4. …
5. ~~Zu einer Gerade gibt es durch einen beliebigen Punkt P eine Parallele.~~

keine Parallelen auf der Kugel

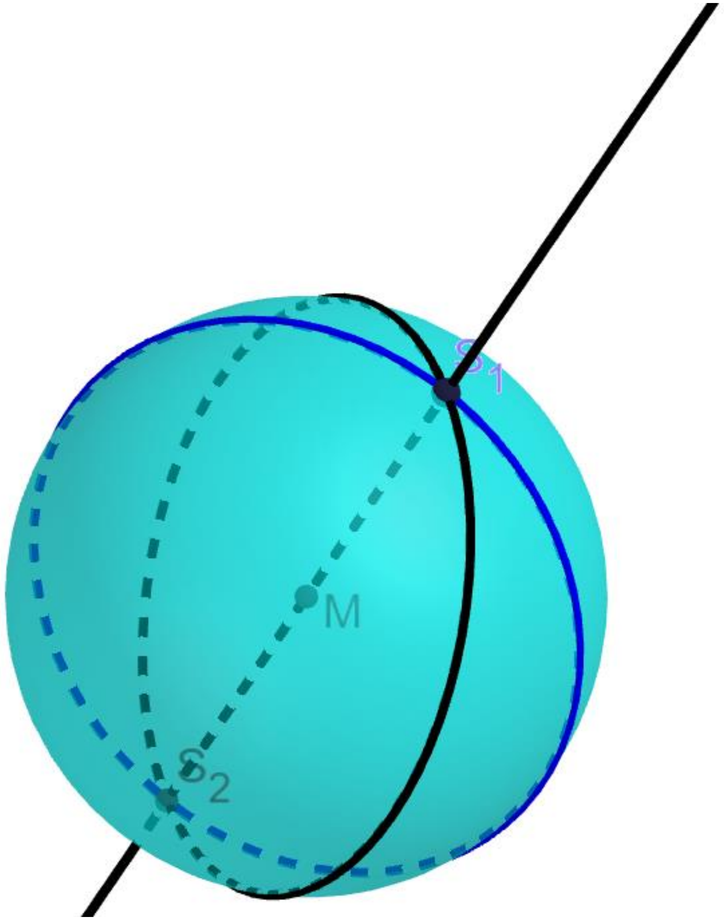
Schnittpunkte zweier Hauptkreise



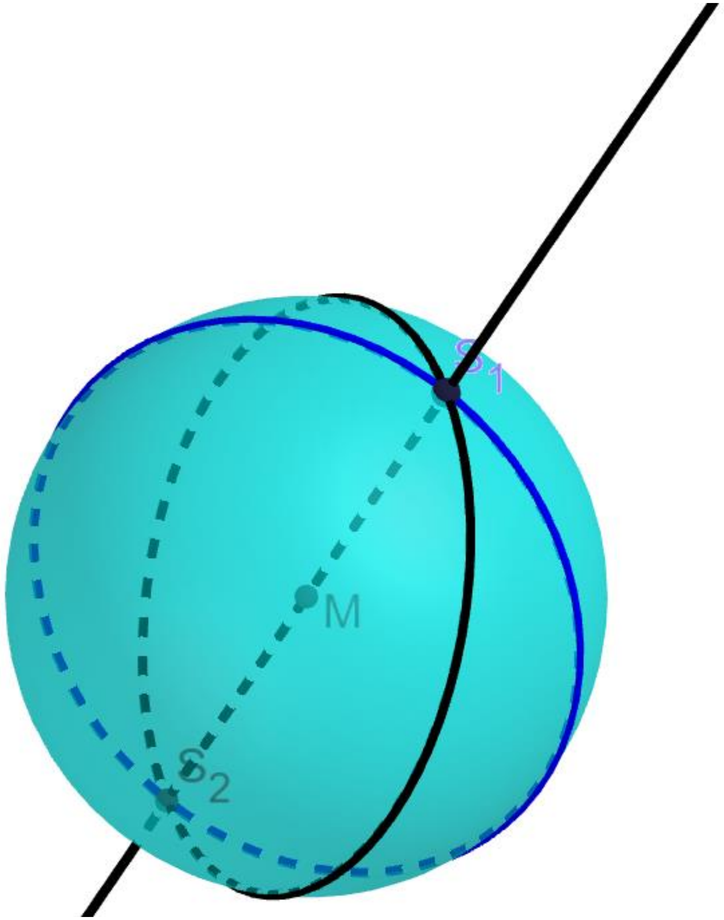
- keine Parallelen



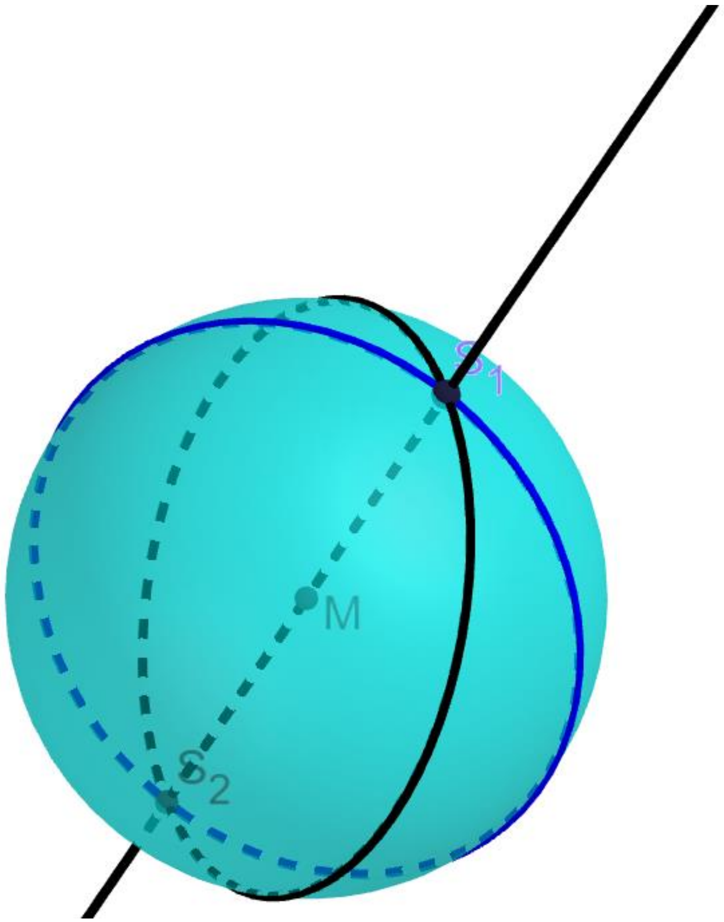
- keine Parallelen
- immer genau zwei Schnittpunkte S_1 und S_1



- keine Parallelen
- immer genau zwei Schnittpunkte S_1 und S_2
- S_1 und S_2 sind Gegenpunkte

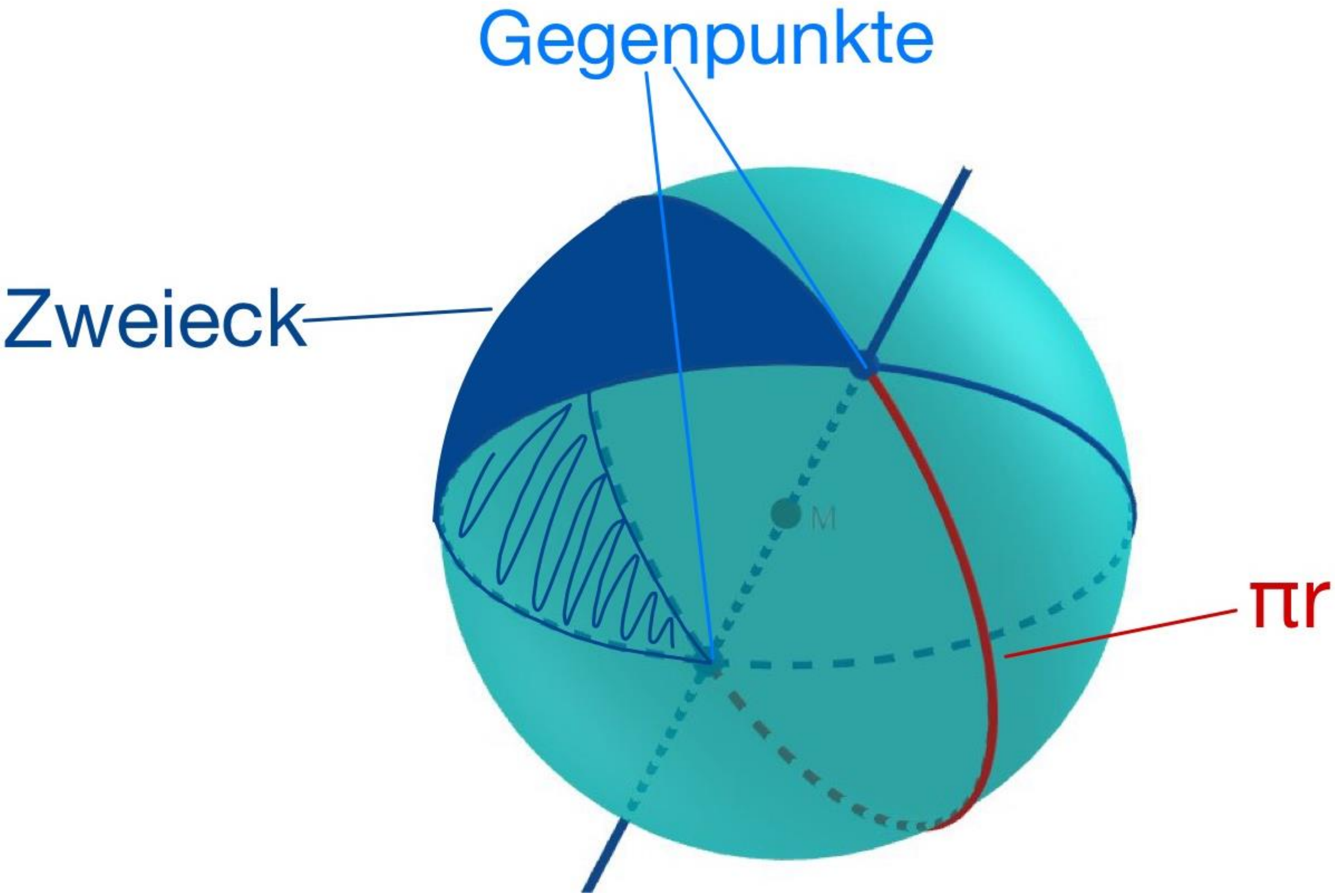


- keine Parallelen
- immer genau zwei Schnittpunkte S_1 und S_2
- S_1 und S_2 sind Gegenpunkte
- Hauptkreise halbieren sich

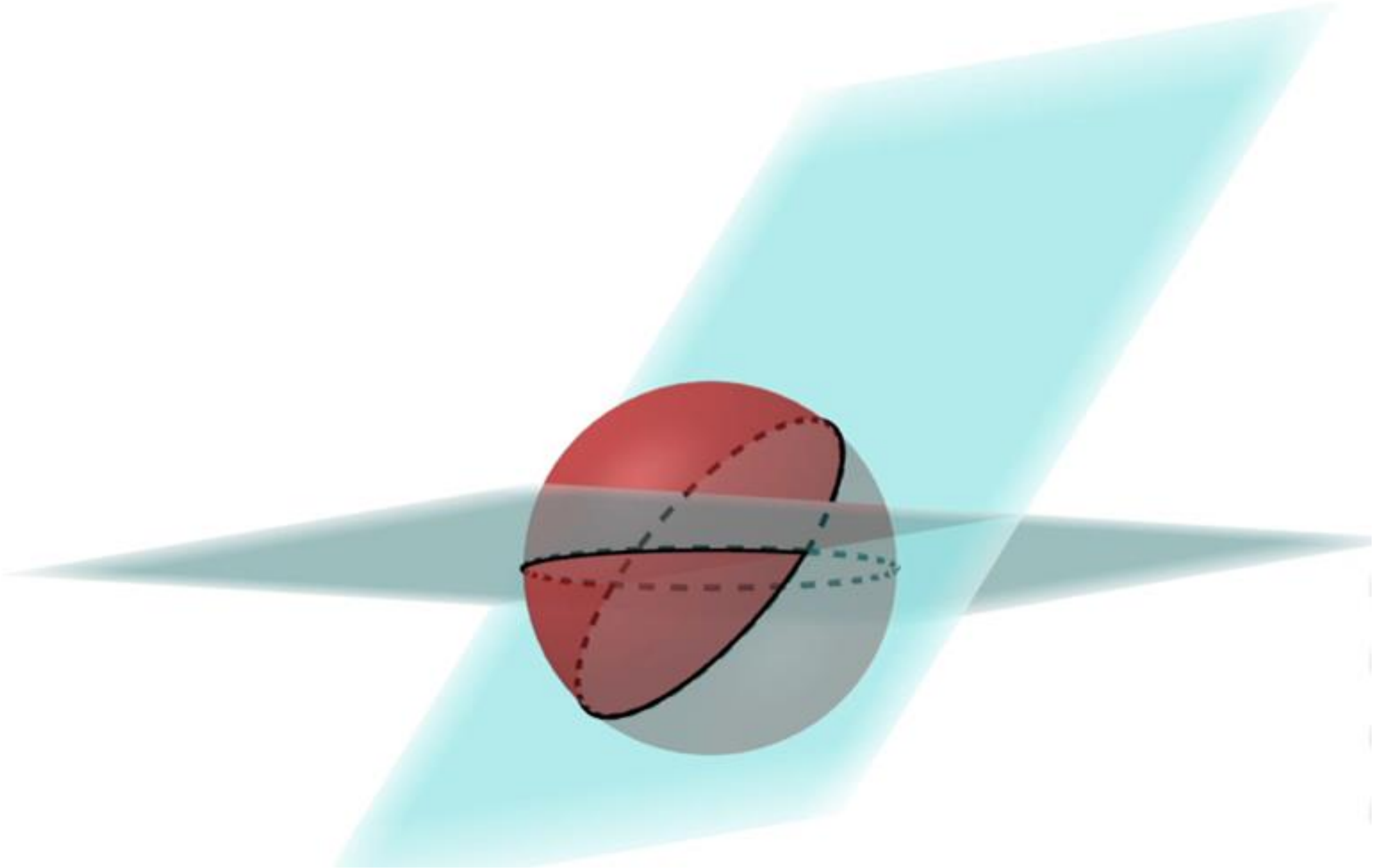


- keine Parallelen
- immer genau zwei Schnittpunkte S_1 und S_1
- S_1 und S_1 sind Gegenpunkte
- Hauptkreise halbieren sich
- Zwei Hauptkreise teilen Kugeloberfläche in vier Teile

Das sphärische Zweieck

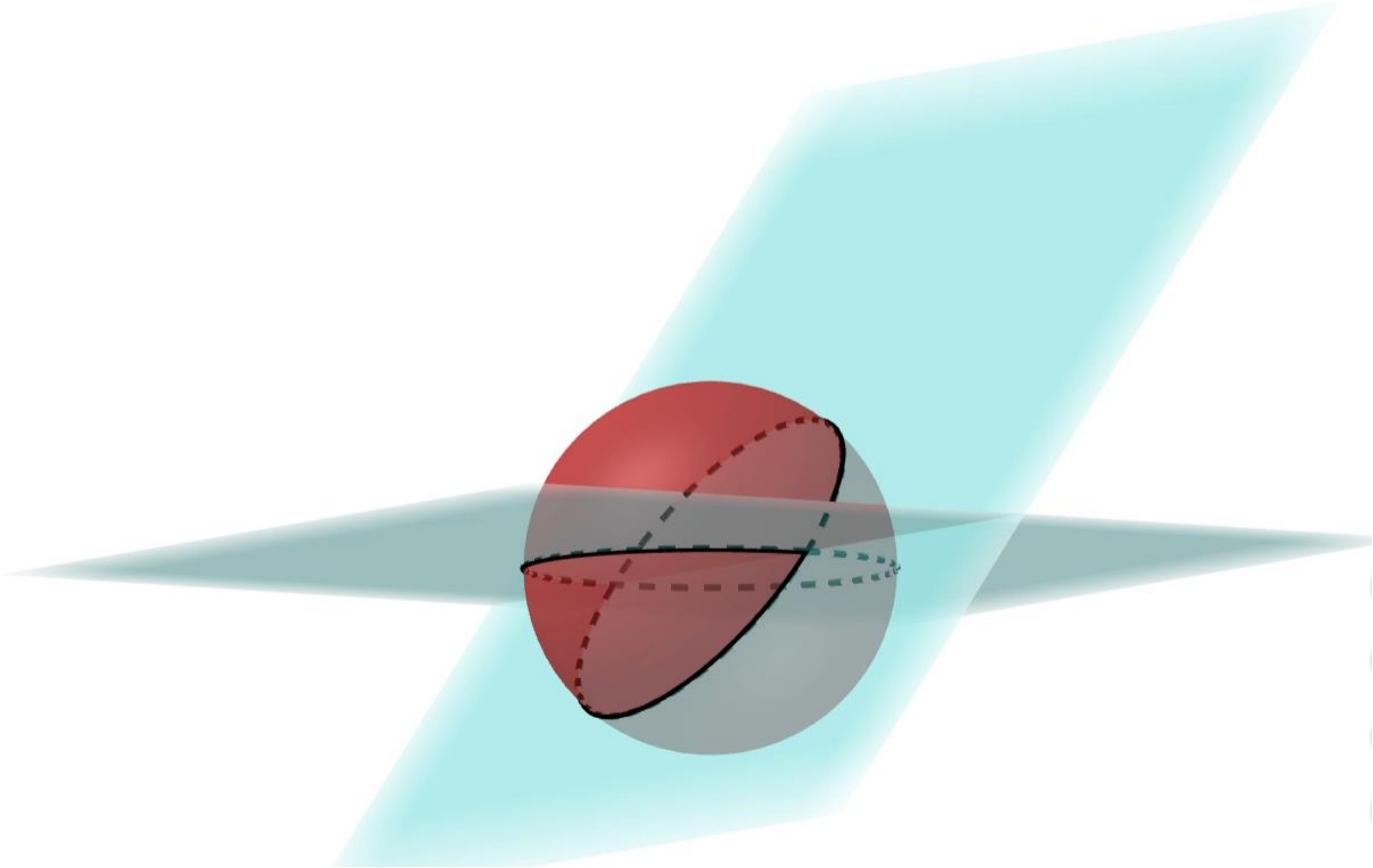

Gegenpunkte
Zweieck
M
πr

Winkel



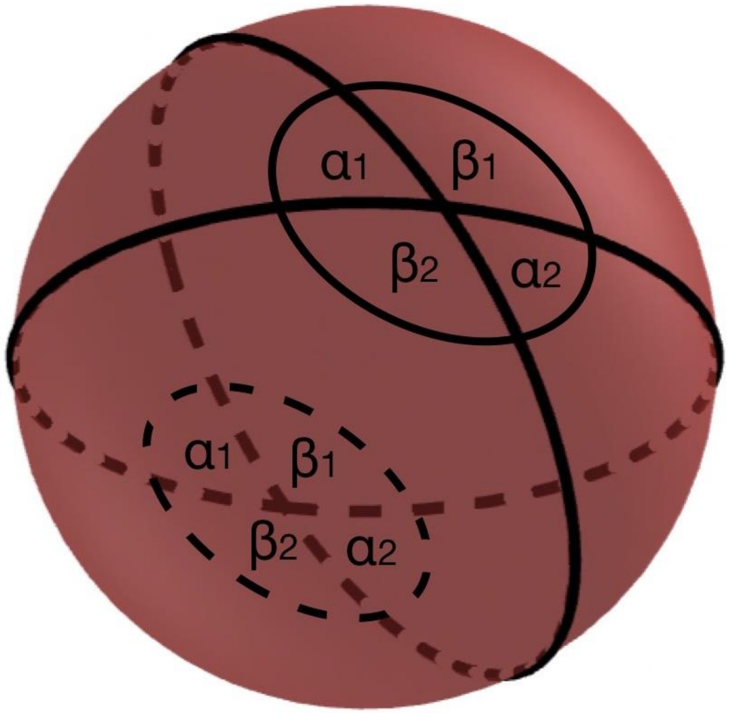
Schnittwinkel zwischen Hauptkreisen

Winkel



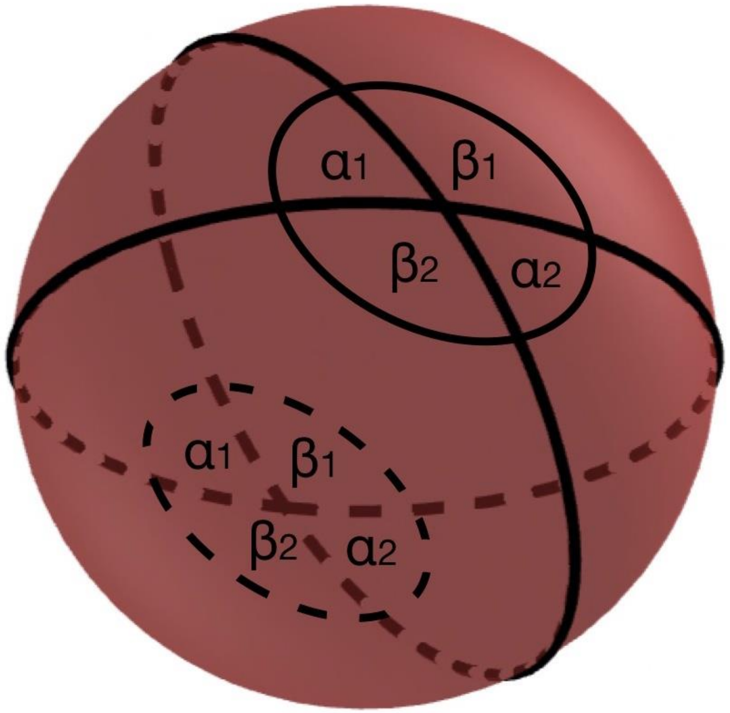
Schnittwinkel zwischen Hauptkreisen
= Schnittwinkel der Kreisebenen

Winkel



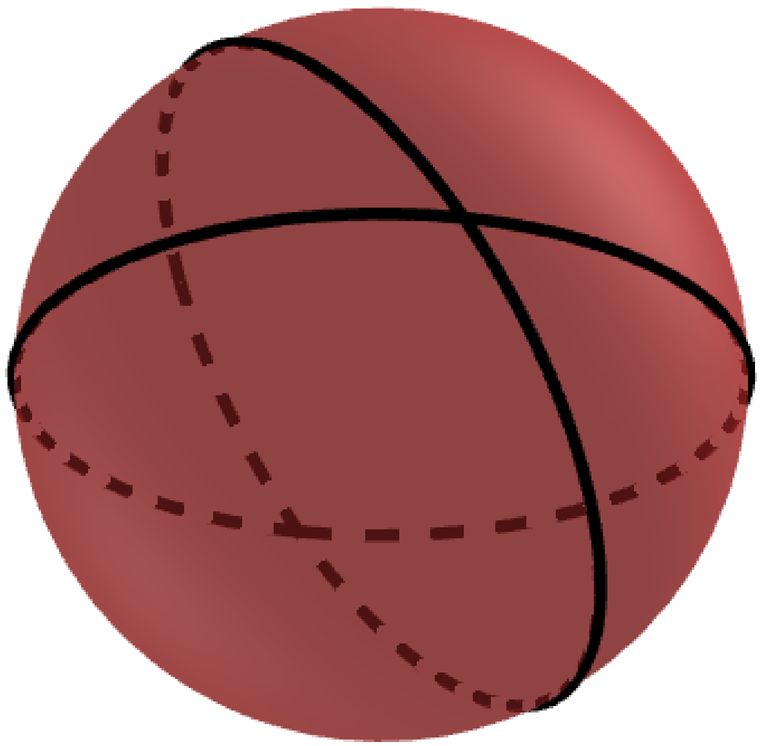
- Innenwinkel eines Zweiecks zueinander gleich

Winkel

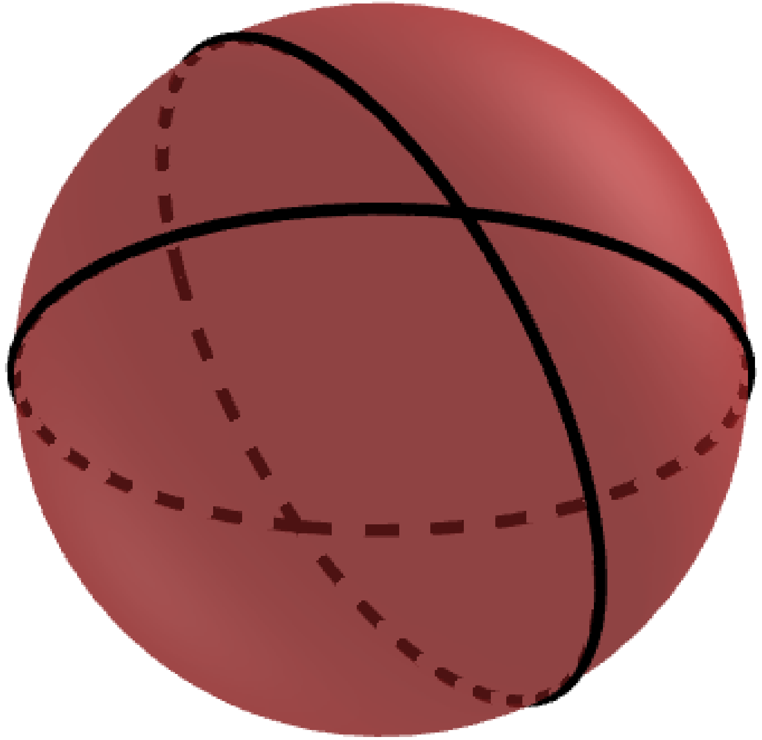


- Innenwinkel eines Zweiecks zueinander gleich
- Innenwinkel gegenüberliegender Zweiecke zueinander gleich

Flächeninhalt



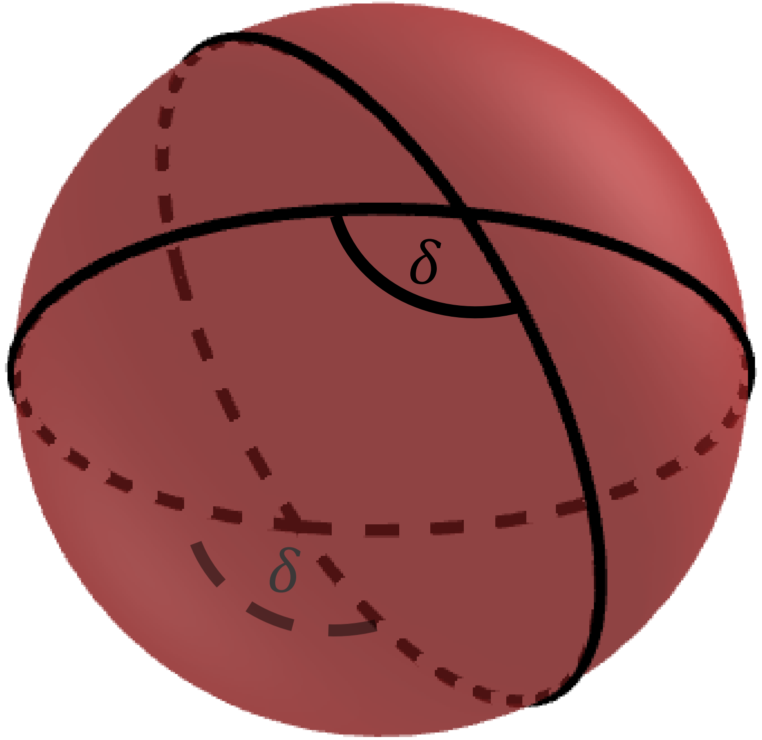
Flächeninhalt



- Flächeninhalt einer Kugel:

$$A_K = 4\pi r^2$$

Flächeninhalt



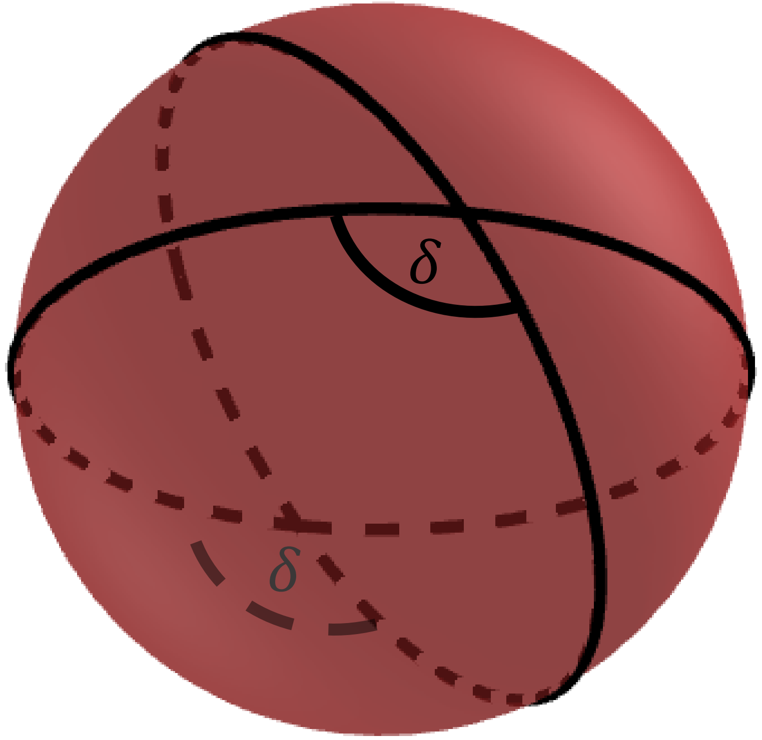
- Flächeninhalt einer Kugel:

$$A_K = 4\pi r^2$$

- Flächeninhalt eines Zweiecks:

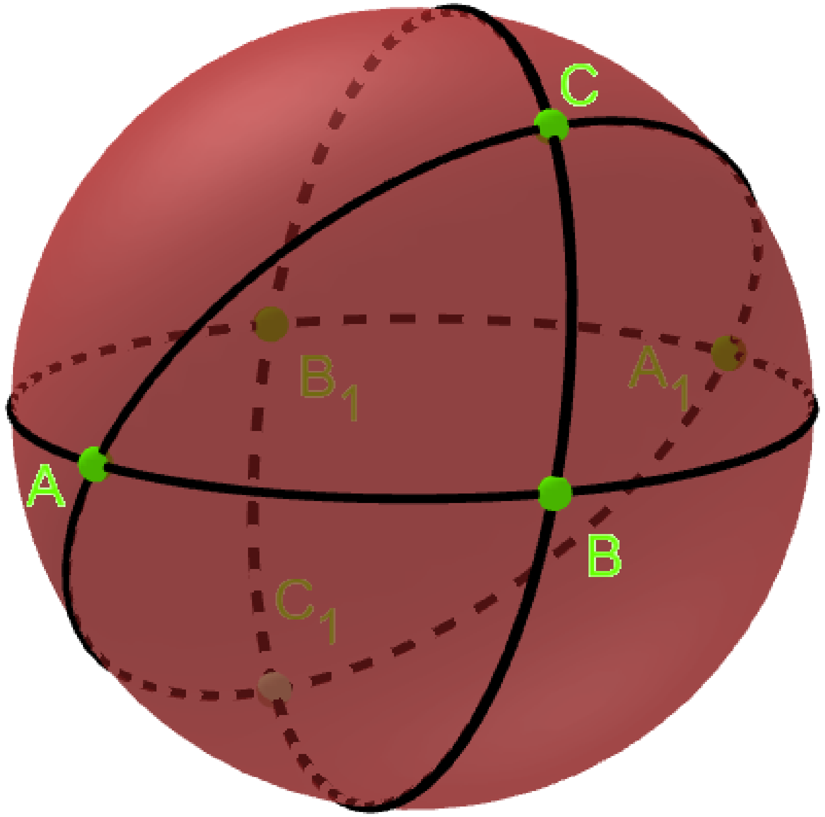
$$A_Z = \frac{\delta}{360^0} \cdot 4\pi r^2$$
$$= \frac{\delta}{90^0} \cdot \pi r^2$$

Flächeninhalt



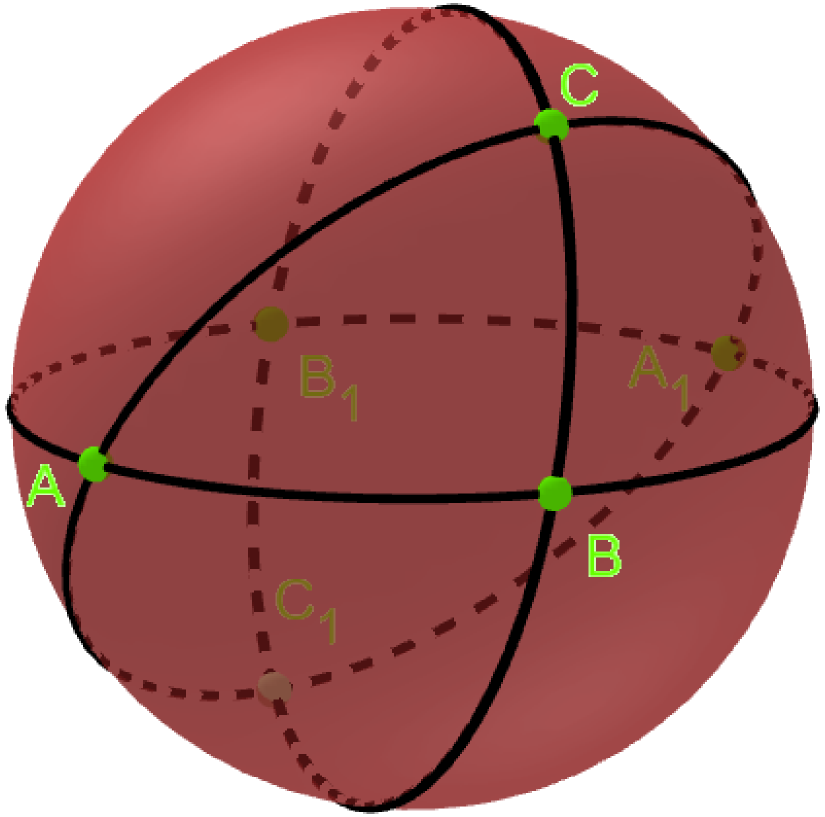
- Flächeninhalt einer Kugel:
$$A_K = 4\pi r^2$$
- Flächeninhalt eines Zweiecks:
$$A_Z = \frac{\delta}{360^0} \cdot 4\pi r^2$$
$$= \frac{\delta}{90^0} \cdot \pi r^2$$
- keine reine Ähnlichkeit möglich

Das sphärische Dreieck



- drei Hauptkreise, die sich nicht im selben Punkt schneiden
- 8 Dreiecke

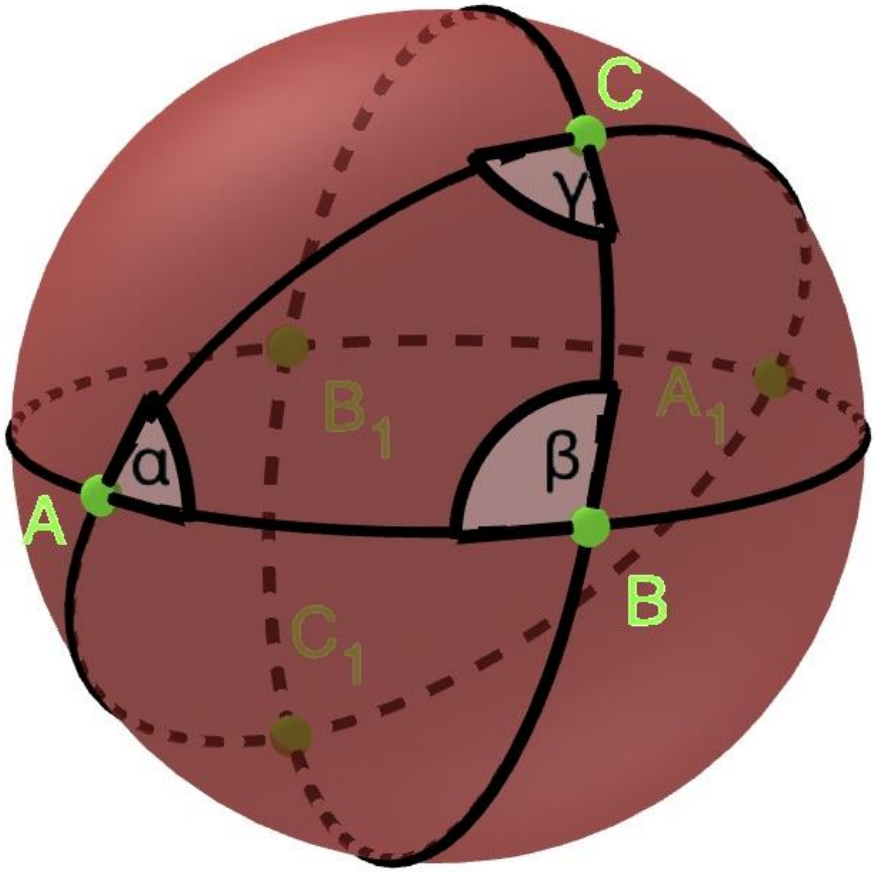
Definitionen



Zum Dreieck ABC:

- Gegendreieck $A_1C_1B_1$
- Nebendreiecke BAC_1, CBA_1, ACB_1
- Scheiteldreiecke AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1

Flächeninhalt



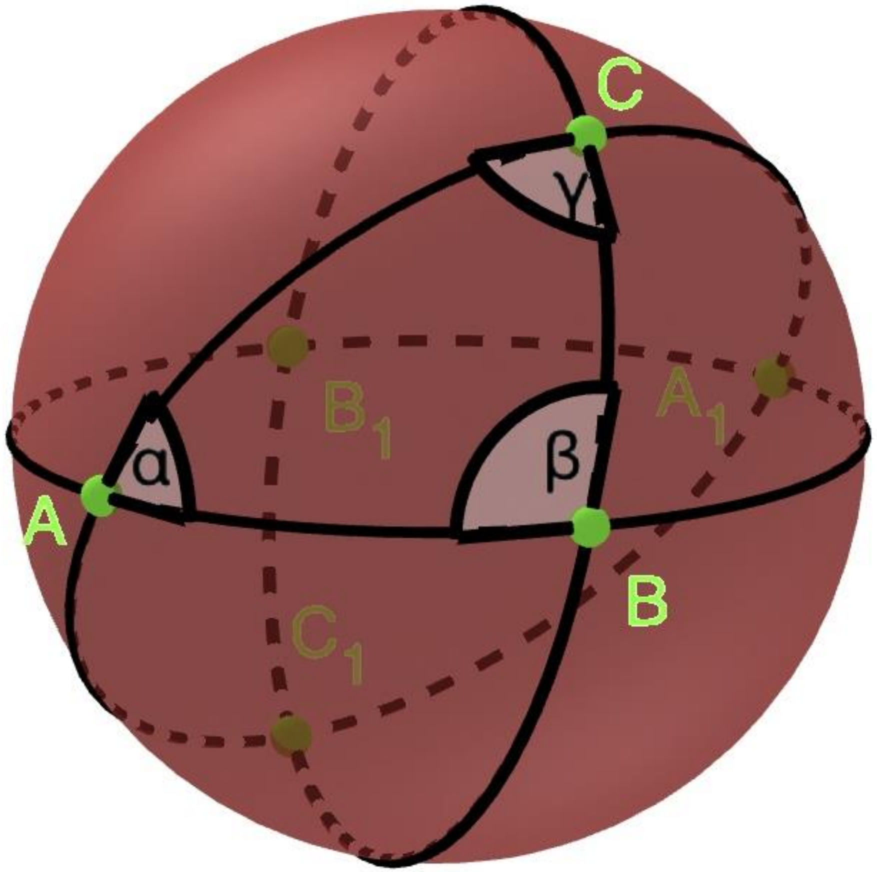
- Dreiecke mit gemeinsamer Seite ergeben Zweieck

$$F_{ABC} + F_{BCA_1} = \frac{\alpha}{90^0}\pi r^2$$

$$F_{ABC} + F_{ACB_1} = \frac{\beta}{90^0}\pi r^2$$

$$F_{ABC} + F_{ABC_1} = \frac{\gamma}{90^0}\pi r^2$$

Flächeninhalt



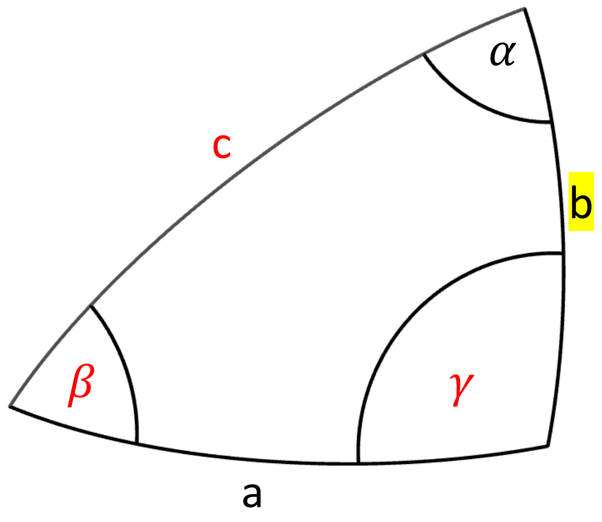
$$F_{ABC} = \frac{\pi r^2}{180°} \cdot (\alpha + \beta + \gamma - 180°)$$

- F abhängig von Winkelsumme

→ keine reine Ähnlichkeit möglich

Trigonometrie

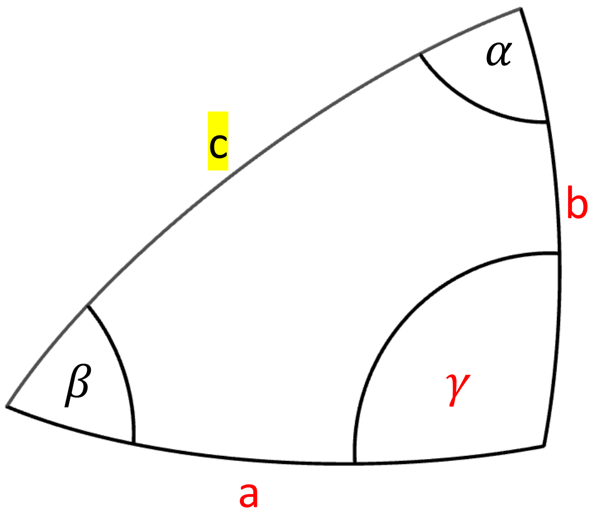
Sinussatz



- gegeben: eine Seite, zwei Winkel, davon einer gegenüberliegend
- gesucht: anderem Winkel gegenüberliegende Seite
- Sinus zweier Seiten verhalten sich wie Sinus gegenüberliegender Winkel

$$\frac{\sin(b)}{\sin(c)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$

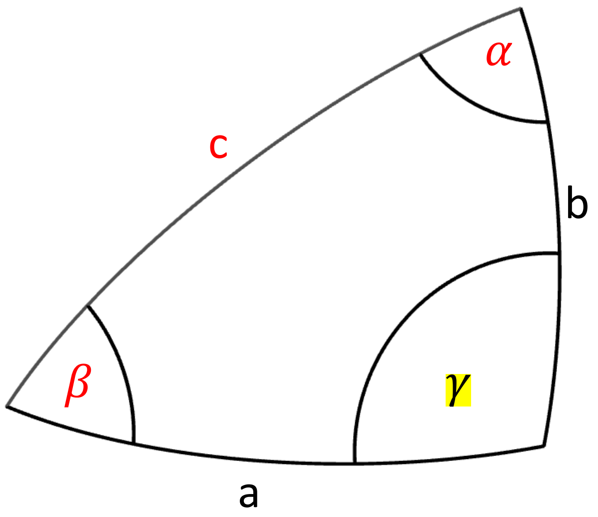
Seitenkosinussatz



- gegeben: zwei Seiten, zwischenliegender Winkel/alle drei Seiten
- gesucht: dritte Seite/ein Winkel

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$
$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\beta)$$
$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$$

Winkelkosinussatz



- gegeben: zwei Winkel, zwischenliegende Seite/alle drei Winkel
- gesucht: dritte Seite/ein Winkel

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a)$$
$$\cos(\beta) = -\cos(\alpha)\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\sin(\gamma)\cos(b)$$
$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$

Anwendungen in der Navigation

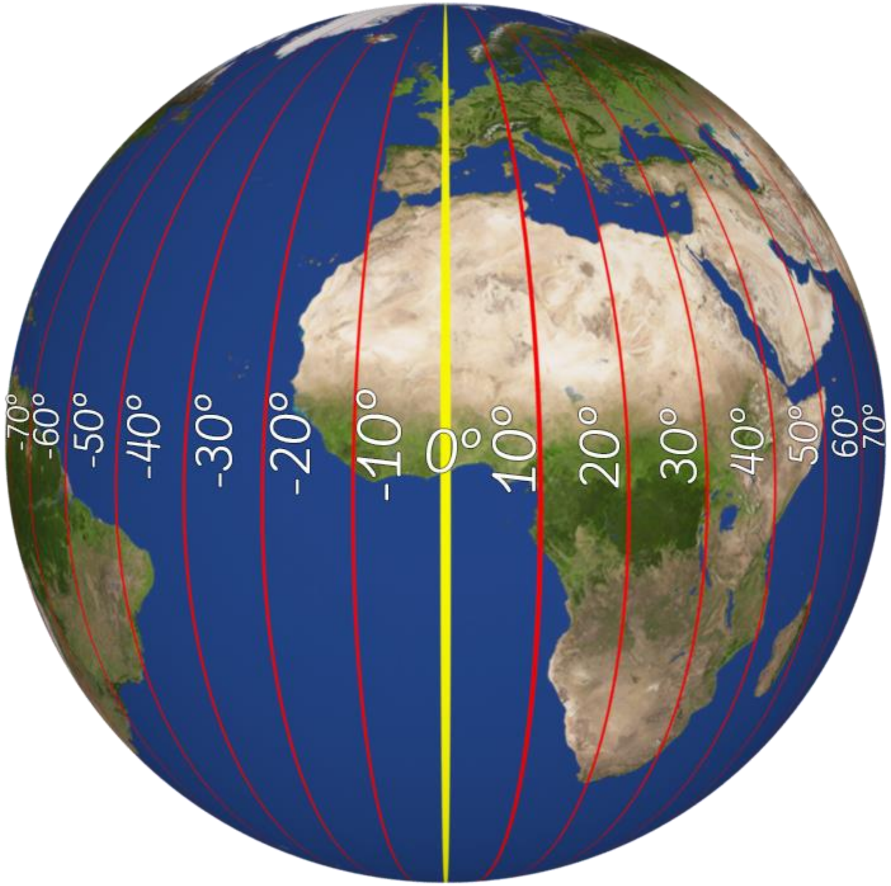
Gestalt der Erde

- Approximation als Kugel

$$r \approx 6367km$$
$$U \approx 2\pi \cdot 6367km \approx 40005km$$

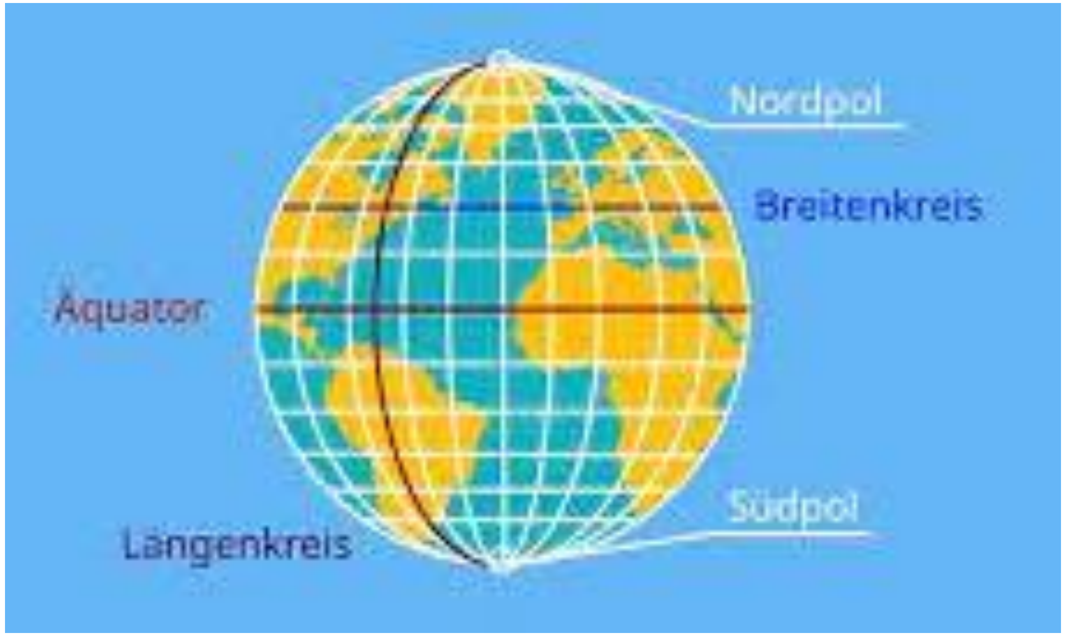
- ein Grad: 112,2km
- Bogenminute: 1,852km=1sm

Gradnetz der Erde



- Längengrade: Hauptkreise durch Nord- und Südpol
- durch Pole geteilt: Meridiane
- Bezugsmeridian: Greenwich
- Länge Mittelwinkel zwischen $\overline{MP}$ und Ebene des Bezugsmeridians
- Länge: östlich/westlich
- max. 180°

Gradnetz der Erde



- Breitengrade: Nebenkreise außer Äquator
- Breite: Mittelwinkel zwischen Äquatorebene und $\overline{MP}$
- max. 90°

2.5 Aufgaben von Wilhelm Terwey, gestellt 1944

2.5.1 Aufgabe 1

Eine Fernkampfbomberstaffel soll am 15. 2. 1944 von Paris aus auf die feindlichen Stützpunkte auf den Azoren starten. Der Angriff soll $\frac{1}{2}$ Stunde von Sonnenaufgang erfolgen. Wann und unter welchem (rechtsweisenden) Kurs muss gestartet werden? Die Startzeit ist in MGZ anzugeben.
Paris ($\phi_1 = 48,9° N$; $\lambda_1 = 2,3° O$)
Azoren($\phi_2 = 38,5° N$; $\lambda_1 = 28,0° W$)
Sonnendeklination $\delta = -12,9°$; ztgl: + 14 min
Fluggeschwindigkeit $v = 400 km/h$