SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Fourierreihen - Darstellung und Anwendung

Elias Zimmermann

NOTE: ______________

PUNKTZAHL: ______________

....

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

22. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung – Ziel der Arbeit

1.1 Allgemeine Zielsetzung

Bei Fourier Reihen handelt es sich um eine Methode, verschiedenste periodische Signale mithilfe trigonometrischer Funktionen darzustellen. Die Hauptzielsetzung dieser Arbeit ist es, die Bedeutung und den großen Anwendungsbezug der Fourier-Analyse auf unzählige alltägliche Themen zu beleuchten. Hierzu werde ich diese Arbeit auf zwei konkrete Bereiche aus dem großen Anwendungsspektrum der Fourier-Analyse reduzieren und versuchen, die grundlegende Theorie und Herleitung beispielhaft darzustellen.
Das erste Anwendungsbeispiel ist der digitale Ton. Das zweite Beispiel, das seit der Zeit des Internets große Bedeutung hat, ist das Bildkompressionsverfahren JPEG. Dazu werde ich im Rahmen dieser Ausarbeitung auf das Thema Fourier-Transformation eingehen.
Zu einem grundlegenden Verständnis des Themas haben vor allem die Werke „An Interactive Guide To The Fourier Transform“ [1] und „But what is the Fourier Transform? A visual introduction“ [2] von Grant Sanderson (3Blue1Brown), sowie „An Interactive Introduction to Fourier Transforms“ [3] von Jez Swanson und „But what is a Fourier series? From heat flow to drawing with circles [...]“ [4] von Kalid Azad (Better Explained) beigetragen.

1.2 Anwendungsbezug: Digitaler Ton

Der erste Anwendungsbereich, den ich für die Darstellung der Fourier-Analyse ausgewählt habe, ist der digitale Ton. Dazu werde ich zunächst eine mathematische Bedingung für beliebige Wellen und Signale darstellen, indem viele wellenartige Funktionen aneinandergereiht werden, wodurch ein gesuchtes Signal erzeugt wird.
Wenn die akustische Schwingung eines Lautes aufgenommen wird und in einem Graphen der Ausschlag in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt wird, sind verschiedenste Ergebnisse zu erhalten. Aber angenommen, es wird ein Ton aufgenommen, der durch das Drücken einer Taste eines Klaviers erzeugt wird, dann liegt allen Tönen eine sogenannte harmonische Schwingung zugrunde. Das heißt, dass sie irgendwie durch eine Sinusfunktion beschrieben werden können. Das macht musikalische Töne mathematisch sehr einfach darzustellen, zumindest wenn es um nur einen Ton geht. Wie die Darstellung verschiedener Töne zur selben Zeit mit Fourier Reihen zusammenhängt und wie Geräusche mathematisch darstellbar sind, die auf den ersten Blick keinem Ton oder mathematischem Zusammenhang mehr zugrunde liegen, darüber wird diese Arbeit noch weitere Auskunft geben.

1.3 Anwendungsbezug: Bildkompression

Der Bereich der Fourier-Analysis liefert auch Werkzeuge zur Signalverarbeitung. Die Fourier Transformation, mit zahlreichen Variationen, ist dabei eine der wichtigsten. „Heute findet die Fourier-Transformation vielfältige Anwendungen in der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik“ [5]. Da die Fourier Transformation sehr tiefgehend ist, wird diese Arbeit nur die Kontinuierliche Fourier Transformation (CFT) behandeln, um ein grundlegendes Verständnis des Verfahrens zu entwickeln und darauf aufbauen zu können.
Für die Erarbeitung dieses Themenabschnittes haben vor allem die Werke „The Fourier Series and Fourier Transform Demystified“ [6] von Up and Atom[1], sowie Teil eins und zwei von „Introduction to the Fourier Transform [...]“ [7] [8] von Brian Douglas beigetragen.
Die Fourier-Transformation ist das Mittel, um die Bestandteile eines beliebigen Signals zu finden und dieses somit mathematisch darstellbar zu machen. Ein Anwendungsbereich der Fourier-Transformation, der fast alltägliche Verwendung bei vielen Menschen hat, ist das Bildkompressionsverfahren JPEG. Ich werde verdeutlichen, wie in diesem Fall die Diskrete Kosinus-Transformation ein alltägliches Problem mit geringfügigem Aufwand lösen kann. Zum Verstehen der Funktionsweise von JPEG hat vor allem das Werk „How are Images Compressed? [...] JPEG In Depth“ [9] von Branch Education[1] geholfen.

2 Fourierreihen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definition periodische Funktion

Da versucht wird, periodische Funktionen darzustellen, ist es sinnvoll, diese einmal allgemein zu definieren. Eine Funktion ist dann periodisch, wenn es eine konstante Periodendauer T gibt, sodass $f(x+T) = f(x)$ für alle x gilt.

2.1.2 Trigonometrische Funktionen

Die Verwendung Trigonometrische Funktionen ist die Methode, wie ein periodisches Signal darzustellen ist. Die gerade definierte Voraussetzung ist dementsprechend erfüllt, denn für Sinusfunktionen gilt: $sin(x) = sin(x+2\pi)$ und für Kosinusfunktionen: $cos(x) = cos(x+2\pi)$. Mit zwei definierten periodischen Funktionen kann sich anschließend an andere periodische Signale herangearbeitet werden.

[1] Vollständige Autorenliste im Literaturverzeichnis

2.2 Darstellung eines eckigen periodischen Signales

Um mit Fourierreihen jedes Signal darstellen zu können, müssen auch eher ungewöhnliche Signale mit Funktionstermen ausdrückbar sein, auch wenn diese auf den ersten Blick nicht mit wellenartigen Funktionen darstellbar erscheinen. Bei Betrachtung der *Abbildung 1 Eckiges Signal*, wird die Frage aufkommen, ob ein solches Signal mit trigonometrischen Funktionen überhaupt dargestellt werden kann und falls ja, dann wie. Hier wird bewusst noch immer von einem *Signal* gesprochen. Der Funktionsbereich ist hier nur eingeschränkt. Es wird also vorerst der Bereich einer Periode betrachtet. Wäre der Funktionsbereich größer, dann würde sich das vorliegende Signal lediglich wiederholen, was für die zu bestimmende Funktion keinen Unterschied macht, da diese (aufgrund von trigonometrischen Funktionen) auch periodisch ist.

2.2.1 Addition vieler trigonometrischen Funktionen

Beim Addieren von trigonometrischen Funktionen, wird zwar genauso vorgegangen, wie bei allen anderen Funktionen auch. Der Funktionswert am Zeitpunkt t der Funktion f wird addiert mit dem Funktionswert am Zeitpunkt t der Funktion g (siehe *Abbildung 2 Summe 2 Sin Funktionen*). Nur durch das periodische Verhalten entstehen dabei teilweise komplett verschieden aussehende Funktionen.
Bei Addition mehrerer Sinusfunktionen mit der Form

$$f(x) = a_1 \cdot sin(x \cdot \omega_1) + a_2 \cdot sin(x \cdot \omega_2) + ...$$

kann durch Anpassung des Koeffizienten a_k, der Frequenz ω_k[2] und einer höheren Anzahl an addierten Teilfunktionen die Funktion immer weiter verfeinert werden.

2.2.2 Eckiges Signal

Mit diesem Wissen ist bei der Funktion

$$f(x) = \frac{4}{\pi} sin(x \cdot \pi \cdot 1)$$

(siehe *Abbildung 3 Eckiges Signal + 1 Sin*) der Zusammenhang mit der Zielfunktion (Eckiges Signal) noch nicht zu erkennen. Wird nun dieselbe Funktion, mit verdreifachter Frequenz und ein Drittel der Amplitude addiert, also

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(sin(x \cdot \pi \cdot 1) + \frac{1}{3} sin(x \cdot \pi \cdot 3))$$

[2] um genau zu sein nicht die Frequenz, dazu später mehr in *Unterunterabschnitt 3.1.1*

(siehe *Abbildung 4 Eckiges Signal + 2 Sin*) so wird die Tendenz immer deutlicher.
Noch genauer wird es aber, je mehr Teilfunktionen addiert werden. Als Nächstes würde folgen:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(sin(x \cdot \pi \cdot 1) + \frac{1}{3}sin(x \cdot \pi \cdot 3) + \frac{1}{5}sin(x \cdot \pi \cdot 5))$$

(*Abbildung 5 Eckiges Signal + 3 Sin*) Spätestens hier wird auch das Muster für die gesuchte Funktion deutlich; der Koeffizient a_k kann ausgedrückt werden durch: $\frac{1}{2k-1}$ (also immer 1 geteilt durch die nächste ungerade Zahl), wobei k die Laufvariable darstellt. Außerdem werden alle Teilfunktionen gestreckt entlang der x-Achse, um den Faktor $\omega_k = (2k - 1) \cdot \pi$ (also immer die nächste ungerade Zahl). Die Konstante π dient nur zur Streckung der Funktion auf die ganzen Zahlen, anhand derer die Zielfunktion definiert ist (siehe *Abbildung 1 Eckiges Signal*). Der Faktor $\frac{4}{\pi}$ entsteht durch die Umwandlung der Fourier-Transformation, worauf ich in Unterunterabschnitt 3.1.5 noch eingehe.

2.2.3 Summenzeichen zur Summierung vieler Teilfunktionen

Die Addition vieler Teilfunktionen, die sich immer um eine festgelegte Gesetzmäßigkeit ändern, können mithilfe des Summenzeichens dargestellt werden:

$$f_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}sin(x \cdot \pi \cdot (2k-1)) \tag{1}$$

Der Parameter n bestimmt hier die Durchläufe der Laufvariable k, die hier auf dem Wert $k = 1$ startet. Wird beispielsweise festgelegt, dass $n = 10$, dann entsteht folgender Graph: *Abbildung 6 Eckiges Signal + 10 Sin*. Damit bestätigt sich auch; je größer n, beziehungsweise je mehr Teilfunktionen addiert werden, desto genauer wird die Zielfunktion. Mit derselben Funktion, nur mit $n = 20$ (Siehe *Abbildung 7 Eckiges Signal + 20 Sin*), wird sich der Zielfunktion immer weiter angenähert.
Dadurch kommt nun die Frage auf: Wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, also n gegen unendlich geht, ist die erzeugte Funktion dann gleichzusetzen mit der Zielfunktion?
Die Antwort darauf ist ja und das ist auch algebraisch beweisbar, für den Rahmen dieser Arbeit muss das aber einfach angenommen werden, ein algebraischer Beweis würde vom Thema abschweifen und die weiteren Gestaltungsmöglichkeiten einschränken.

2.3 Fourierreihe allgemeine Formel

Es folgt allgemein für Fourierreihen:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(A_k \cdot cos(x \cdot \omega_k) + B_k \cdot sin(x \cdot \omega_k)) \tag{2}$$

Neu ist hier der Kosinus Teil, der für die eckige Funktion nicht nötig war. Da jede Kosinusfunktion durch eine verschobene Sinusfunktion beschrieben werden kann (siehe *Abbildung 8 Kosinus zu Sinus*), ändert sich nicht viel, es können nur komplexere Funktionen dargestellt werden, ohne dass eine Phasenverschiebung nötig ist. Die Frequenz ω_k[3] ist definiert mit: $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$. T ist die Periodendauer, k weiterhin die Laufvariable und A_k, sowie B_k sind die Fourier-Koeffizienten der Teilfunktionen, die die Amplitude der einzelnen Funktionen festlegen. Der Term $\frac{A_0}{2}$ beschreibt den Mittelwert von f(x), also die Ruhelage, der periodischen Bewegung. Der Parameter n wird hier ersetzt durch ∞, n könnte aber auch beibehalten werden, dann wäre die Anzahl der addierten Teilfunktionen variabel bestimmbar, durch das Abändern von n. Oft geht der Grenzwert von n aber in Richtung unendlich und das ist gleichzusetzen, denn:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Für die Fourierreihe gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. Es handelt sich hier um die trigonometrische Darstellung (auch genannt: Sinus-Kosinus-Form), das wird später noch von Wichtigkeit. In der Literatur gibt es bei der Formel kleine Unregelmäßigkeiten. ω ist zum Beispiel manchmal ersetzt durch f oder T (Siehe *Unterunterabschnitt 3.1.1*). Auch $\frac{A_0}{2}$ wird je nach Definition mal erwähnt oder nicht. Außerdem können Sinus- und Kosinus-Teil in zwei eigene Summenzeichen geschrieben werden, um den Endwert des Summenzeichens für jeden Teil unterschiedlich anpassen zu können. Die Formel kann auch noch einmal ganz anders aussehen, wenn eine andere Darstellungsform verwendet wird (kurzer Verweis dazu in *Unterunterabschnitt 3.1.4*), aber für den Rahmen dieser Arbeit bleibt es bei der Formel (2).

2.4 Bezug zum Musikbeispiel

Aber wie ist das Mathematische hier in Bezug auf die Akustik zu sehen? Die Teilfunktionen, die zu einer neuen Funktion zusammengesetzt werden, sind die Bestandteile, mit denen der Computer am einfachsten arbeiten kann.
Könnte keine Funktion bestimmt werden, die das Signal beschreibt, dann müsste das Signal ganz anders gespeichert werden, zum Beispiel durch Spei-

[3]um genau zu sein nicht die Frequenz, dazu später mehr in *Unterunterabschnitt 3.1.1*

chern vieler Punkte in regelmäßigem Abstand. Das würde aber zu einem hohen Speicheraufwand oder Ungenauigkeiten führen, da beim Abrufen zwischen den Punkten regressiv wieder Werte ermittelt werden müssten oder zusätzlich sehr viele Werte benötigt wären, um zumindest annähernd genau zu sein. Deshalb ist es von großem Vorteil, ein akustisches Signal mithilfe von Funktionen zu definieren, die im Vergleich dazu genauer sind und deutlich weniger Speicherkapazität brauchen.
Hier zeigt sich bereits ein weiteres Problem: Wenn ein Computer komplexe Signale beispielsweise bei der Tonaufnahme aufzeichnet, wie entwickelt dieser daraus eine Funktion für das gesuchte Signal? Vor allem bei der Aufnahme von Stimmen oder anderen nicht musikalischen Geräuschen, ist ein resultierendes Signal oft weit entfernt von einer Sinuskurve (siehe *Abbildung 9 unregelmäßiges Signal*), sodass einfach so darauf kommen, wie bei der eckigen Funktion, keine Option mehr ist.
Dieses Verfahren, aus einem gemischten Signal die einzelnen Bestandsfunktionen wieder zu extrahieren, wird Fourier-Transformation genannt. Damit setzt sich der nächste Teil dieser Arbeit auseinander.

3 Mathematische Darstellung eigener Signale

Zielfrage: Wie ermittelt man die Funktion eines beliebigen Signales?

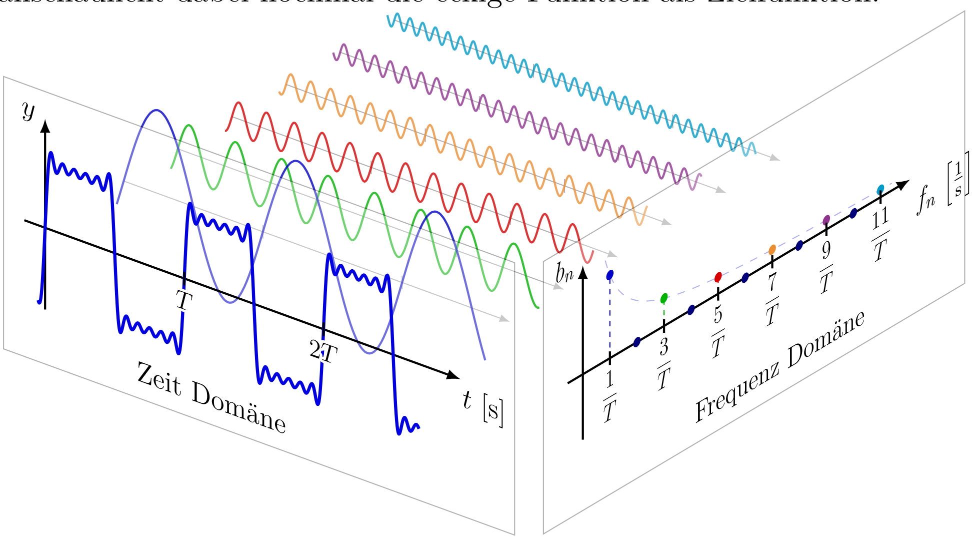
3.1 Fourier-Transformation

Warum die Fourier-Transformation dabei hilft, die Zielfrage zu erfüllen, dafür muss erst einmal der Zusammenhang zwischen Ziel- und Teilfunktionen erläutert werden, beziehungsweise den Bestandteilen der Teilfunktionen: den Amplituden und Frequenzen. Im Folgenden wird es um die Kontinuierliche Fourier-Transformation (CFT) gehen. Es gibt noch andere Verfahren, die in der Regel ähnlich, aber nicht gleich funktionieren. Die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) beziehungsweise die Variante Schnelle Fourier-Transformation (FFT) wird vor allem bei der Umsetzung durch Computer angewandt und spielt deshalb eine zentrale Rolle in vielen Anwendungsmöglichkeiten der Signalverarbeitung.

3.1.1 Frequenz- und Zeitfunktion

Die bisher betrachteten Sinusfunktionen waren immer dargestellt mit Amplitude in Abhängigkeit von Zeit (Zeit-Domäne). Wird t mit $\frac{1}{t}$ ersetzt, dann kann dieselbe Funktion, anhand ihrer Frequenz f dargestellt werden (Frequenz-Domäne). Die Einheit ist Herz (Hz), definiert mit: $1\text{Hz} = \frac{1}{s}$. Hier ist noch anzumerken, dass bei Fourierreihen oft statt f für die Frequenz ω benutzt

wird. Genau genommen beschreibt ω eigentlich die Winkelgeschwindigkeit. In der Literatur lassen sich manchmal auch Formeln für die Fourierreihe oder Transformation finden, bei denen weder Winkelgeschwindigkeit ω noch Frequenz f benutzt wird, sondern die Periodendauer T. Alle drei Größen hängen aber miteinander zusammen und abhängig davon, welche verwendet wurde, ist die Formel in der Regel leicht angepasst. Für die Winkelgeschwindigkeit ω gilt: $\omega = \frac{2\pi r}{T}$; und für die Periodendauer T gilt: $T = \frac{1}{f}$. Jede Umformung der Grundformel entspricht diesen Gesetzmäßigkeiten.
Es stehen jetzt also zwei verschiedene graphische Darstellungsmöglichkeiten zur Verfügung, die miteinander zusammenhängen. Die Teilfunktionen können mit Amplituden-Zeit und Amplituden-Frequenz Graphen beschrieben werden. Zur Verdeutlichung ist die Funktion $sin(3x)$ zu betrachten in den Abbildungen *Abbildung 10 Sin(3x) Zeit-Amplitude* und *Abbildung 11 Sin(3x) Frequenz-Amplitude*. In der Zeit-Amplituden Form ist die gewöhnliche Darstellung von Sinusfunktionen zu erkennen. In der Frequenz-Amplituden Darstellung ist an der y-Achse die Amplitude verblieben, an der x-Achse jetzt aber die Frequenz. Zwischen den beiden kann ohne Genauigkeitsverluste übertragen werden. Auch die Zielfunktion, eine Funktion, die aus vielen Sinusfunktionen besteht, kann mit beiden Formen ausgedrückt werden. In den Abbildungen *Abbildung 12 Sin Zeitdomäne* und *Abbildung 13 Sin Frequenzdomäne* wird das Beispiel $f(x) = 2sin(x) + 0,5sin(3x) - sin(4x)$ dargestellt. Die folgende Abbildung zeigt den Zusammenhang zwischen beiden Darstellungsformen und veranschaulicht dabei nochmal die eckige Funktion als Zielfunktion:



[4]

Die Fourier-Transformation ist nun dazu da, um aus dem gegebenen Signal, das Amplitude in Abhängigkeit von der Zeit darstellt, in die Darstellung zu transformieren, welche die Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz zeigt, sodass dadurch alle einzelnen Teilfunktionen entnehmbar sind.

[4]Quelle: Tikz.net (Siehe Abbildungsverzeichnis)

3.1.2 Inverse Fourier-Transformation

Die Inverse Fourier-Transformation beschreibt denselben Vorgang in die andere Richtung, das heißt, es wird aus der Frequenzdomäne die Zeitdomäne extrahiert und nicht umgekehrt, wie bei der Fourier-Transformation. Da die reguläre Fourier-Transformation den gesuchten Zweck hier erfüllt und beide Verfahren im Kern gleich funktionieren, geht es im Folgenden nicht um die Inverse Transformation. Beide Gesetzmäßigkeiten der Umwandlungen sind auch sehr ähnlich. Wichtig ist nur, dass zwischen den beiden ein Skalierungsfaktor nötig ist. Darauf komme ich später zurück in *Unterunterabschnitt 3.1.6*.

3.1.3 Funktionsweise Fourier-Transformation

Wie die Fourier-Transformation funktioniert, ist also simpel. Es wird nur komplexer zu verstehen, warum diese so funktioniert. Wird das ursprüngliche Signal durch eine Sinusfunktion einer bestimmten Frequenz geteilt, ergibt sich die Frequenzdomäne als Ergebnis, also genau was gesucht war. Es ist genauso simpel zu sagen: „Wie viele 10-Euro-Scheine sind in 30 Euro“, und: „Wie viel 20Hz Signal ist in $f(t)$“, wobei $f(t)$ ein beliebiges periodisches Signal ist.

3.1.4 Mathematische Formel und Herleitung

Die mathematische Formel, die im Regelfall in der Literatur zu finden ist, beschreibt die Teilfunktion $F(\omega)$ (wobei e die eulersche Zahl mit Imaginärteil i ist und $f(t)$ das ursprüngliche Signal) mit:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt \tag{3}$$

Die Formulierung „in der Regel“ ist hier bewusst gewählt, denn wie bereits bei der allgemeinen Formel der Fourierreihe erwähnt, gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten, die mathematisch gleichzusetzen sind. Um also zur vorher benutzten Darstellungsform zurückzukehren, kann die Fourier-Transformation noch vereinfacht werden:

Mithilfe der Eulerschen Formel wird eine Verbindung zwischen Analysis und Trigonometrie hergestellt, Sinus und Kosinus werden als e-Funktion mit Realteil und Imaginärteil dargestellt. Wie genau das funktioniert, geht über das Thema hinaus. Es gilt: $e^{i\omega t} = cos(\omega t) + i \cdot sin(\omega t)$. Also folgt für die Formel:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos(\omega t) - i \cdot sin(\omega t) dt$$

Jetzt sieht der Term schon mehr nach der vorher benutzten Formel für die Fourierreihe aus. Aber warum wird überhaupt integriert und warum ist das i noch da? Um die Formel zu verstehen ist es sinnvoll, sich ein Beispiel anzusehen.

3.1.5 Beispiel eckige Funktion

Dabei bietet es sich an, wieder die eckige Funktion zu betrachten, bei der vorher das Ergebnis vorausgesetzt war. Wir wissen, dass die eine Teilfunktion mit der Frequenz 3π vorkommt. Eingesetzt ergibt sich:

$$F(3\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos(3\pi t) - i \cdot sin(3\pi t)dt$$

Da die eckige Funktion in $x = 0$ startet, genau wie alle Sinusfunktionen, kann der Kosinus-Teil weggelassen werden, ohne dass dabei an allgemeiner Gültigkeit verloren wird und der Sinusteil als Realteil betrachtet werden. i fällt also auch weg. Über bleibt:

$$F(3\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin(3\pi t)dt$$

Ab hier ist auch von einer Hartley-Transformation die Rede, da nur noch von Realteil ausgegangen wird (Vergleiche [10]). Als Letztes ist noch zu verstehen, was genau passiert, indem der Term $f(t) \cdot sin(3\pi t)$ integriert wird. Zu jedem Zeitpunkt t, ist dieses Produkt, aus ursprünglichem Signal und Teilfunktion einer bestimmten Frequenz, immer genau dann positiv, wenn beide Graphen zumindest einen positiven oder beide Graphen einen negativen y-Wert haben. Wenn beide Graphen aber einen unterschiedlichen y-Wert haben, dann ist das Produkt immer negativ. Das heißt, zu jedem Zeitpunkt, bei dem die Graphen tendenziell korrelieren, also irgendwie zusammenpassen/übereinstimmen, ist das Ergebnis des Terms positiv. Wenn nun alle Werte von $-\infty$ bis ∞ betrachtet werden, ergibt sich ein Wert, der allgemein ausdrückt, wie sehr die beiden Graphen korrelieren. Dem ist noch hinzuzufügen, dass wenn das Integral gleich null ist, sind die Graphen nicht Korrelat, wenn das Ergebnis negativ ist, sind die Graphen Antikorrelat. Das Verfahren wird für möglichst viele Frequenzen durchgeführt, um zu erfahren, ob diese im ursprünglichen Signal vorhanden sind und wie stark ausgeprägt (Amplitude).
In der Abbildung *Abbildung 14 Integral Sin3x und eckige Funktion*, ist zu erkennen, dass bei $t = \frac{1}{6}$ oder $t = \frac{7}{6}$ beispielsweise eine maximale Korrelation vorhanden ist. Bei $t = \frac{1}{2}$ wäre beispielsweise eine Antikorrelation vorliegend. Das Verhältnis zwischen grüner und roter Fläche gibt nun die gesamte Korrelation an und somit die Amplitude der Teilfunktion $sin(3\pi t)$. Anhand dieser Abbildung ist auch zu erkennen, warum die Amplitude $\frac{1}{3}$ beträgt.
Wird der Term aber berechnet, dann ergibt sich nicht, dass die Amplitude $\frac{1}{3}$ ist, sondern etwa $0,424413$ oder genau ausgedrückt: $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3}$. Der Vorfaktor $\frac{4}{\pi}$ kommt auch nicht nur hier vor, sondern bei jeder Teilfunktion des eckigen Signales. Die Amplitude von $sin(5\pi t)$ beträgt $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{5}$.

Dieser Vorfaktor $\frac{4}{\pi}$ entsteht beim Berechnen der Fourier-Transformation und ist auch bereits in *Gleichung 1* zu sehen.

3.1.6 Skalierung der Fourier-Transformation

Unabhängig vom gerade benannten Vorfaktor des Ergebnisses einer möglichen Transformation, gibt es einen Skalierungsfaktor (in der Literatur auch bezeichnet als Normierungskonstante), der $\frac{1}{\sqrt{T^n}}$ beträgt, mit n-Dimensionen ($\mathbb{R}^n$). Dieser ist in der Literatur nicht immer einheitlich, aber davon ausgegangen, dass die Periodendauer 2π beträgt und $n = 2$, da die meisten Anwendungen sich im zweidimensionalen Raum abspielen, dann ergibt sich der Skalierungsfaktor $\frac{1}{2\pi}$, der sich meistens in der Literatur wiederfinden lässt. Entweder die reguläre oder inverse Fourier-Transformation muss mit diesem Faktor skaliert werden, auch das ist nicht immer einheitlich. Im gleichen Stil, wie Gleichung 3, ist die Inverse Fourier-Transformation definiert mit:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

3.2 Bezug: Musikbeispiel

Die Fourier-Transformation ermöglicht es einem nun, aus einem Signal, die einzelnen Bestandteile herauszuarbeiten. Das wäre dementsprechend vergleichbar damit, ein Geräusch in viele einzelne Töne aufzulösen, mit denen es einfacher zu arbeiten ist. Die Frequenz einer Bestandsfunktion ist vergleichbar mit der Tonhöhe, nur dass es bei den meisten Instrumenten nur bestimmte ausgewählte Frequenzen gibt. Der Ton a1 (auf dem Klavier) hat beispielsweise die Frequenz 440Hz. Wird ein Ton mit der Frequenz 445Hz gespielt, erzeugt dies ein (leicht) verstimmtes a. Die Amplitude der Bestandsfunktionen ist vergleichbar mit der Lautstärke des Tones.
Angenommen, es gäbe ein Klavier mit unendlich vielen Tasten für alle Frequenzen und kann mit unbegrenzt hoher Präzision spielen, dann könnte jedes beliebige Geräusch mit dem Klavier nachgeahmt werden. Und die Tasten, die gedrückt werden müssten, um dieses Geräusch zu erreichen, die können mithilfe der Fourier-Transformation herausgearbeitet werden.

4 Andere Anwendungen von Fourierreihen

4.1 Bildverarbeitung/ Kompression: JPEG

Auch eines der meistbenutzten Bildkompressionsverfahren, JPEG (Joint Photographic Experts Group), funktioniert mithilfe der Fourier-Transformation. JPEG wird fast überall verwendet, um Bilder kompakt abzuspeichern. Ein

Bild wird in kleinere Dateigrößen komprimiert, indem einige Informationen des Bildes entfernt werden. Dadurch wird die Dateigröße verringert, aber es kann auch zu Verschlechterung der Bildqualität kommen, abhängig davon wie stark das Bild komprimiert wird.
JPEG geht in 5 Schritten vor, wobei nur der dritte Schritt mithilfe der Fourier-Transformation funktioniert. Im Folgenden werden deshalb die meisten Schritte nur grob erklärt, bis auf den dritten Schritt:

4.1.1 Farbraum Umwandlung und Chrominanz-Vereinfachung

Weil das menschliche Auge nur etwa 6 Millionen Zapfen, aber etwa 120 Millionen Stäbchen hat, ist der Mensch deutlich besser darin hell und dunkel auseinander zu halten, als Farben (Vergleiche [11]). Deshalb spart JPEG beim Komprimieren deutlich mehr Farbdetails ein, als an Helligkeitswerten.
Im ersten Schritt wird genau das umgesetzt. Die RGB-Werte (Farbwerte) werden in ein anderes Farbmodell (YCbCr-Farbmodell) umgewandelt, dass jeden Pixel anhand Helligkeitswert, sowie Blaugelb und Rotgrün Chrominanz umgewandelt. Diese Umwandlung kann verlustfrei in beide Richtungen geschehen. Da nun Helligkeits- und Farbwerte getrennt sind, können nun die Farbwerte einzeln vereinfacht werden, indem immer 4 Pixel zu einem Farbwert zusammengefasst werden (zweiter Schritt). Anschließend werden die Chrominanz-Bilder wieder hochskaliert und die drei Ebenen wieder zu RGB-Werten umgewandelt. Dadurch ist bereits die Dateigröße halbiert.

4.1.2 Diskrete Kosinus-Transformation

Im dritten Schritt wird mit dem Prinzip der Fourier-Transformation das Bild weiter vereinfacht. Es wird immer ein Feld von 8 mal 8 Pixeln genommen und einzeln die drei Farbebenen der Pixel unabhängig voneinander bearbeitet. Der Helligkeitswert und die Rotgrün und Blaugelb Chrominanz werden einzeln betrachtet.
Angenommen, es wird mit der Helligkeitsebene begonnen und für jeden Pixel ein Helligkeitswert zwischen 0 und 256 (mit 0 gleich schwarz und 256 gleich weiß) gesetzt, wobei jedem Pixel eine Stelle einer acht mal acht großen Matrix

zugeordnet wird, ergibt sich zum Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 37 & 36 & 37 & 42 & 47 & 50 & 55 & 61 \\ 37 & 37 & 38 & 44 & 49 & 52 & 54 & 57 \\ 38 & 39 & 44 & 52 & 56 & 57 & 56 & 56 \\ 37 & 44 & 56 & 65 & 68 & 67 & 62 & 59 \\ 43 & 57 & 72 & 83 & 85 & 80 & 73 & 66 \\ 54 & 57 & 97 & 105 & 102 & 93 & 84 & 77 \\ 72 & 101 & 17 & 116 & 111 & 105 & 95 & 85 \\ 91 & 115 & 124 & 121 & 116 & 108 & 100 & 92 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Anschließend wird jeder einzelne Wert neu skaliert (verschoben um -128, sodass 0, der Medianwert ist), sodass die Matrix nun so aussieht:

$$\begin{bmatrix} -91 & -92 & -91 & -86 & -81 & -78 & -73 & -67 \\ -91 & -91 & -90 & -84 & -79 & -76 & -74 & -71 \\ -90 & -89 & -84 & -76 & -72 & -71 & -72 & -72 \\ -91 & -84 & -72 & -63 & -60 & -61 & -66 & -69 \\ -85 & -71 & -56 & -45 & -43 & -48 & -55 & -62 \\ -74 & -71 & -31 & -23 & -26 & -35 & -44 & -51 \\ -56 & -27 & -11 & -12 & -17 & -23 & -33 & -43 \\ -37 & -13 & -4 & -7 & -12 & -20 & -28 & -36 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Danach wird der acht mal acht Pixel-Block neu dargestellt durch eine Mischung aus 64 verschiedenen Grundbildern, sozusagen die Frequenzen (Siehe *Abbildung 15 DCT Grundbilder*). Es wird für jede Frequenz ein Wert ermittelt, der angibt, wie viel dieser Frequenz Teil des eigentlichen Bildes ist. Die Matrix ergibt sich dann so:

$$\begin{bmatrix} 560 & -41 & -57 & -12 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ -180 & -25 & 43 & 14 & 12 & 0 & 0 & -1 \\ 42 & 17 & 16 & -3 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & -12 & -11 & -3 & 3 & 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -3 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Jeder Wert gibt hier nun exakt an, wie viel jedes Grundbildes (*Abbildung 15*) benötigt ist, um genau das Graubild wieder zu erhalten. Der Vorteil daran, das Graubild anhand der Grundbilder zu beschreiben, ist, dass die Grundbilder unterschiedliche Frequenzen haben, die in dem vierten Schritt, der Quantisierung, zum Teil rausgefiltert werden können. In diesem Schritt wurden dementsprechend noch keine Daten entfernt, sondern nur die Grundlage gelegt, sodass im nächsten Schritt nun auf dieser Grundlage vereinfacht werden kann.

4.1.3 Quantisierung

Eine weitere Einschränkung des menschlichen Auges ist, dass kleine Details in einer großen Menge schlecht auszumachen sind. Beim Blick aus der Distanz auf ein paar Bäume, sind die einzelnen Blätter wohl kaum differenzierbar, doch die großen Flächen und Kanten, wie der Baumstamm sind gut erkennbar. Unser menschliches Auge kann also deutlich besser niedrigere Frequenzen wahrnehmen, als hohe.
Die Quantisierung macht sich das zunutze, indem alle Frequenzwerte durch einen den Frequenzen in einer Quantisierungstabelle (Quantisierungsmatrix) zugeordneten Wert geteilt werden und auf ganze Werte gerundet wird. Die Quantisierungsmatrix kann beispielsweise so aussehen:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 4 & 4 & 6 & 11 & 15 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 8 & 14 & 19 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 12 & 14 & 18 & 20 \\ 6 & 6 & 9 & 11 & 14 & 17 & 21 & 23 \\ 9 & 12 & 12 & 18 & 23 & 22 & 25 & 21 \\ 11 & 13 & 15 & 17 & 21 & 23 & 25 & 21 \\ 13 & 12 & 12 & 13 & 16 & 19 & 21 & 21 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Die Werte oben links in der Tabelle, wo auch die kleineren Frequenzen angeordnet sind, sind deutlich geringer, damit hier nur geringfügig Detail verloren wird. Die Werte unten rechts in der Tabelle sind deutlich größer, da hier die höheren Frequenzen angeordnet sind.
Es werden jetzt also die Werte aus Gleichung 6, durch den zugeordneten Wert aus Gleichung 7 geteilt. Dabei wird das Ergebnis an jeder Stelle gerundet. Erst dadurch gehen Daten verloren. Allerdings werden, dadurch, dass die Zahlen bei den höheren Frequenzen größer sind, diese Werte deutlich mehr eingespart, als die wichtigeren niedrigeren Frequenzen. Da unser Auge ohnehin die höheren Frequenzen nicht sehr deutlich differenzieren kann, ist genau der gewünschte Effekt erzielt: Platz wird gespart und das Bild wird weiterhin ähnlich wahrge-

nommen. Eine mögliche resultierende Matrix sieht dann etwa so aus:

$$\begin{bmatrix} 140 & -14 & -14 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -60 & -8 & 14 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 4 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

4.1.4 Huffman Kodierung und Lauflängenkodierung

Der letzte Schritt vereinfacht den Speicherprozess weiter, indem die nun vereinfachten Werte anders aufgeschrieben werden. Die Huffman Kodierung schreibt die Werte nicht von links nach rechts auf, sondern geht in einem Zickzack-Muster von oben links nach unten rechts durch (Siehe *Abbildung 16 Huffman ZickZack*). Das hat den Effekt, dass die höheren Frequenzen alle am Ende sind. Da die Werte der höheren Frequenzen oft gleich null sind, spart die Lauflängenkodierung Platz, indem diese Redundanzen gesammelt aufträgt. Also zum Beispiel anstatt:

$$[10, 6, 5, 5, 3, 1, 0, 0, 0, 0, ...]$$

wird umgeschrieben zu:

$$[10, 6, (2\cdot)5, 3, 1, (4\cdot)0, ...]$$

5 Zusammenfassung/ Rückblick

5.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Fourier-Analysis ist für mich, insbesondere aufgrund des hohen Anwendungsbezugs in so vielen Bereichen des alltäglichen Lebens eines der spannendsten Themen in der Mathematik.
Angesichts der großen Komplexität dieses Themas bestand die größte Herausforderung bei der Fertigstellung dieser Ausarbeitung im Reduzieren. Um meinen Hauptzielen – dem Aufzeigen der Bedeutsamkeit dieses mathematischen Werkzeuges und einer anschaulichen Herleitung an konkreten Beispielen gerecht zu werden, hätte ich viele weitere Seiten füllen können. Aufgrund des begrenzten Rahmens in dieser Facharbeit habe ich auf die geschichtlichen Hintergründe der Entstehung von Fourierreihen, dem ursprünglichen Zweck (Wärmetheorie) und der weiteren wissenschaftlichen Diskussion zu diesem Thema gänzlich verzichtet.

In Abschnitt zwei habe ich grundlegende Voraussetzungen der Fourier-Analysis dargestellt, um diese auf die Akustik zu übertragen. Im darauffolgenden Teil habe ich die Funktionsweise der Fourier-Transformation vorgestellt. Damit wollte ich ein zentrales Element der Signalverarbeitung von Fourierreihen darlegen, das im letzten Abschnitt des Hauptteils dieser Arbeit die Voraussetzung für den Anwendungsbereich „Bildkompression JPEG“ gibt.

5.2 Rückblick: Wichtigkeit des Themas

Dass die Fourier-Analysis ein wichtiger Teil der Mathematik ist, konnte ich hoffentlich hinreichend darlegen. Es könnte aber Diskussion darüber geben, für wen es sinnvoll ist, sich mit diesem Themenbereich tiefergehend auseinanderzusetzen. Sicherlich sind die mathematischen Voraussetzungen, um in dieses Thema eintauchen zu können, nicht gerade trivial. Ob das Thema in das Schulsystem eingebunden werden könnte, steht deshalb auch außer Frage. Aufgrund der enormen Spannbreite von Anwendungsmöglichkeiten – insbesondere im Hinblick auf die heute verfügbaren Möglichkeiten der Technik – lohnt es sich meiner Meinung nach, sich mit dem Thema zu beschäftigen. Ich denke, dass wer ein tieferes Verständnis vieler unterschiedlicher naturwissenschaftlicher Grundlagen und Prozesse erlangen will, sollte sich unbedingt mit diesem Teil der Mathematik beschäftigen.

6 Anhang

Literatur

[1] G. Sanderson. An Interactive Guide To The Fourier Transform. 3Blue1Brown. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k

[2] G. Sanderson. But what is the Fourier Transform? A visual introduction. 3Blue1Brown. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY

[3] J. Swanson. An interactive introduction to fourier transforms. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.jezzamon.com/fourier/index.html

[4] A. Kalid. But what is a Fourier series? From heat flow to drawing with circles DE4. Better Explained. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://betterexplained.com/articles/an-interactive-guide-to-the-fourier-transform

[5] J. Klotz, "Grundlagen der Fourier-Transformation und deren Anwendung in der Magnetresonanztomographie (MRT)," 2019, zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://diglib.uibk.ac.at/ulbtirolhs/content/titleinfo/3580370/full.pdf

[6] J. Tan-Holmes, S. Morrow, S. Mackenzie, D. Berwick, D. Kouts, and S. Mackenzie. The Fourier Series and Fourier Transform Demystified. Up and Atom. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=mgXSevZmjPc

[7] B. Douglas. Introduction to the Fourier Transform (Part 1). Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlg

[8] B. Douglas. Introduction to the Fourier Transform (Part 2). Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=kKu6JDqNma8

[9] T. Tablante, P. Lee, and T. Karlsson. How are Images Compressed? [. . .] JPEG In Depth. Branch Education. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://www.youtube.com/watch?v=Kv1Hiv3ox8I

[10] (Vollständige Autoren liste: https://xtools.wmflabs.org/articleinfo-authorship/de.wikipedia.org/Hartley-Transformation?uselang=de).

Hartley-Transformation. Wikipedia. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://de.wikipedia.org/wiki/Hartley-Transformation

[11] Studyflix. Zapfen und Stäbchen. Zuletzt Aufgerufen: 17. März 2023. [Online]. Available: https://studyflix.de/biologie/zapfen-und-stabchen-5396

Abbildungsverzeichnis

[1] Unterunterabschnitt 3.1.1: Autor: I. Neutelings,
Quelle: https://tikz.net/fourier_series/

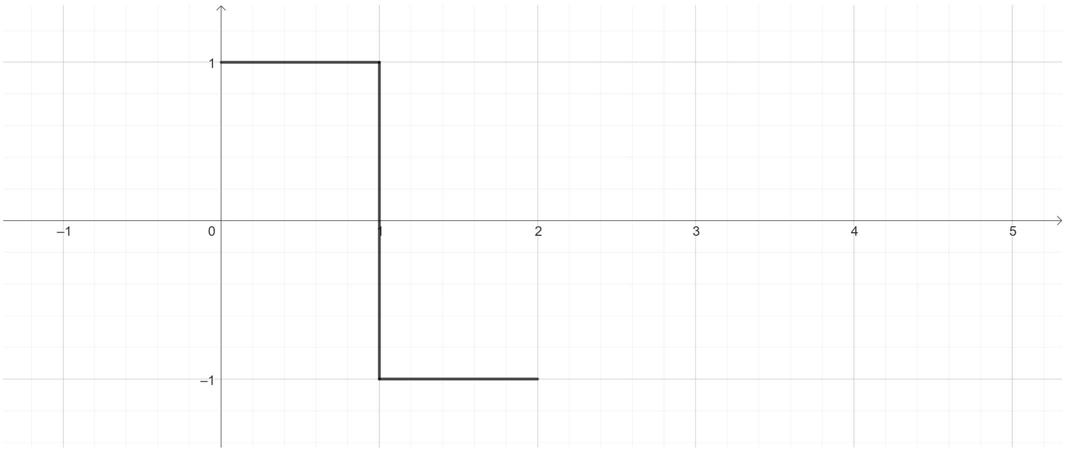


Abbildung 1: Eckiges Signal

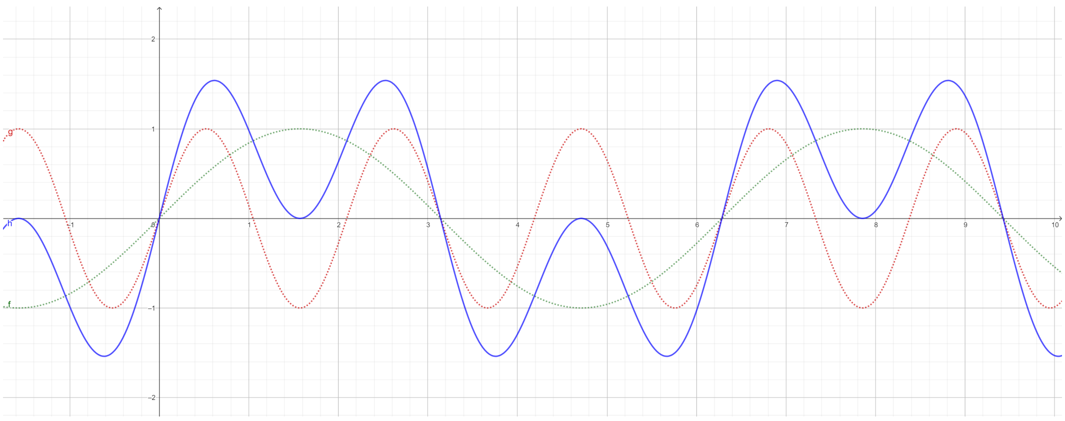


Abbildung 2: Summe 2 Sin Funktionen

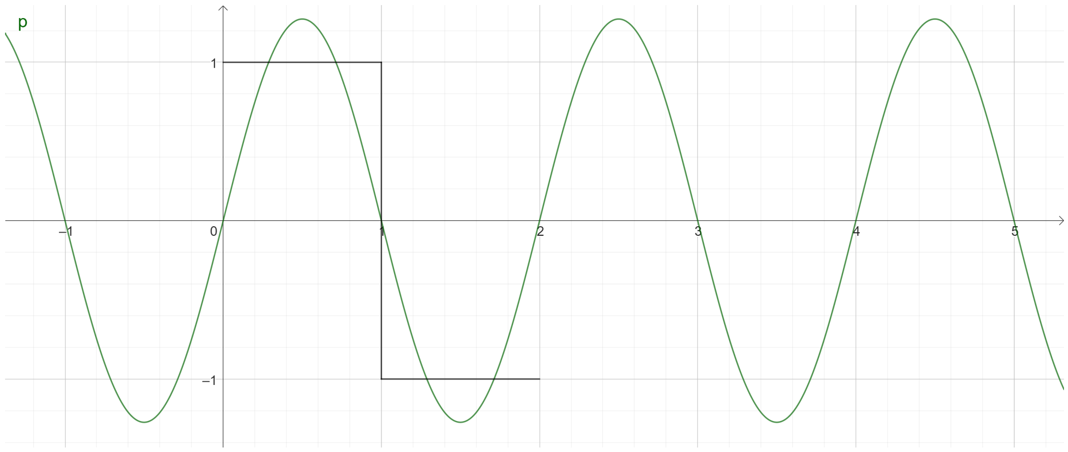


Abbildung 3: Eckiges Signal + 1 Sin

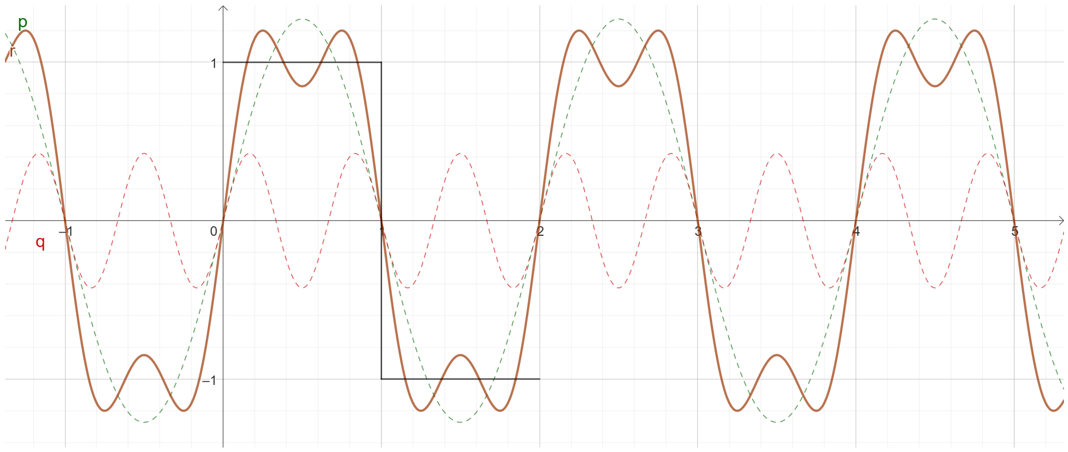


Abbildung 4: Eckiges Signal + 2 Sin

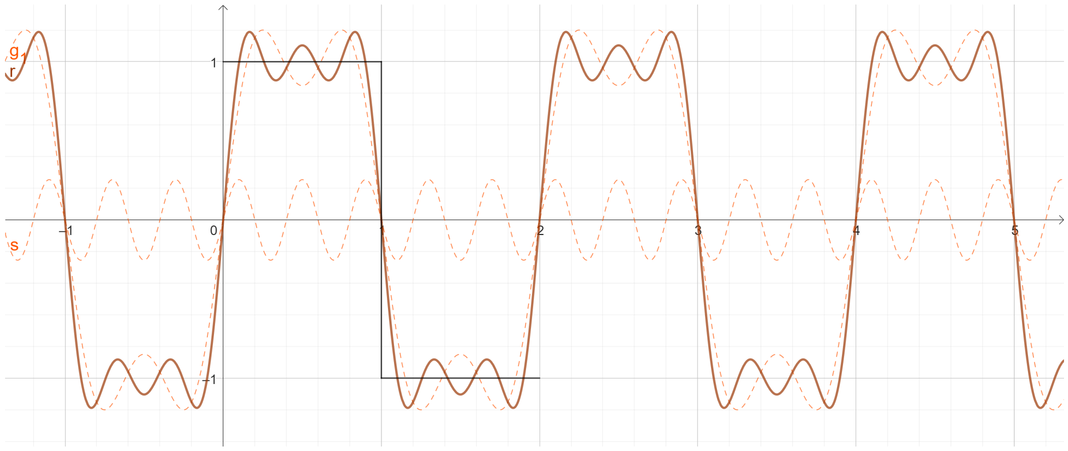


Abbildung 5: Eckiges Signal + 3 Sin

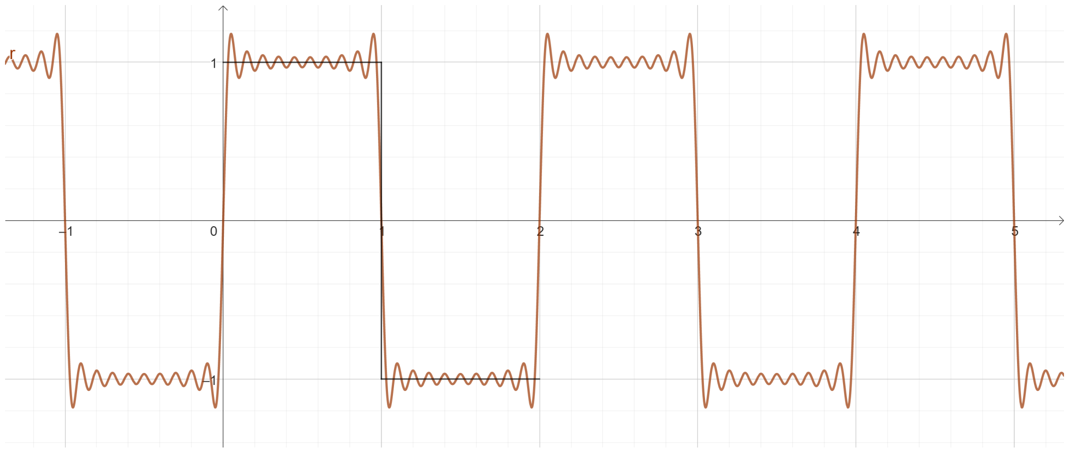


Abbildung 6: Eckiges Signal + 10 Sin

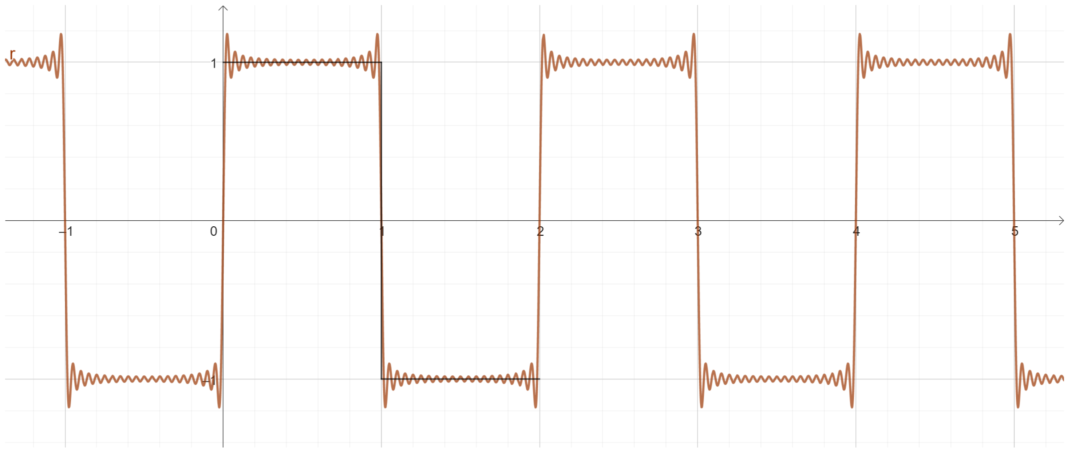


Abbildung 7: Eckiges Signal + 20 Sin

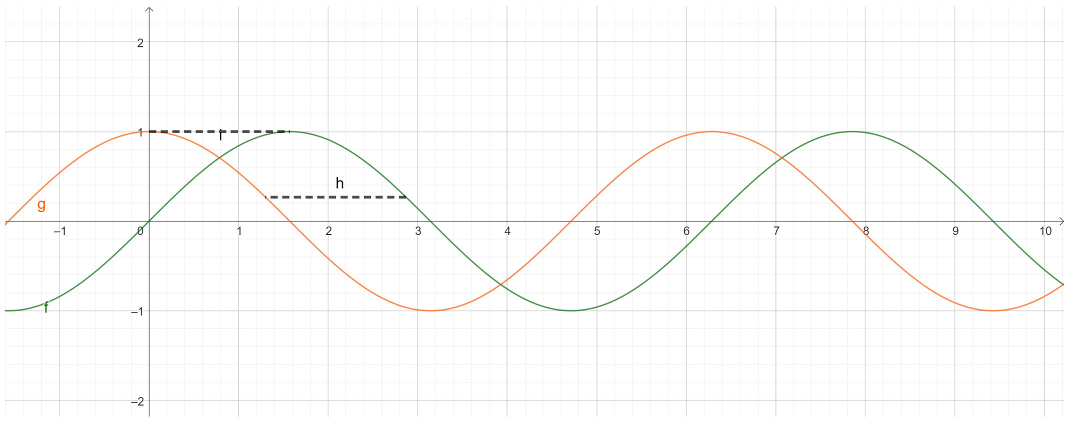


Abbildung 8: Kosinus zu Sinus

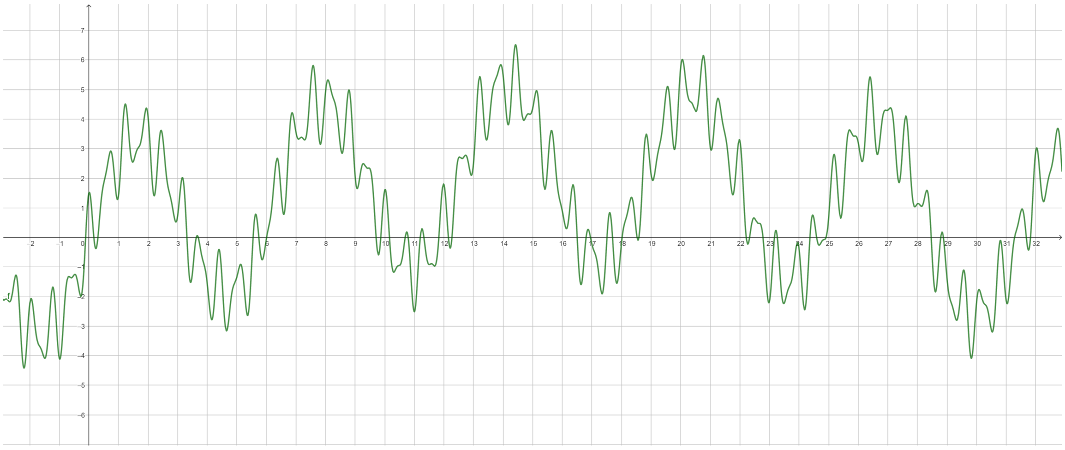


Abbildung 9: unregelmäßiges Signal

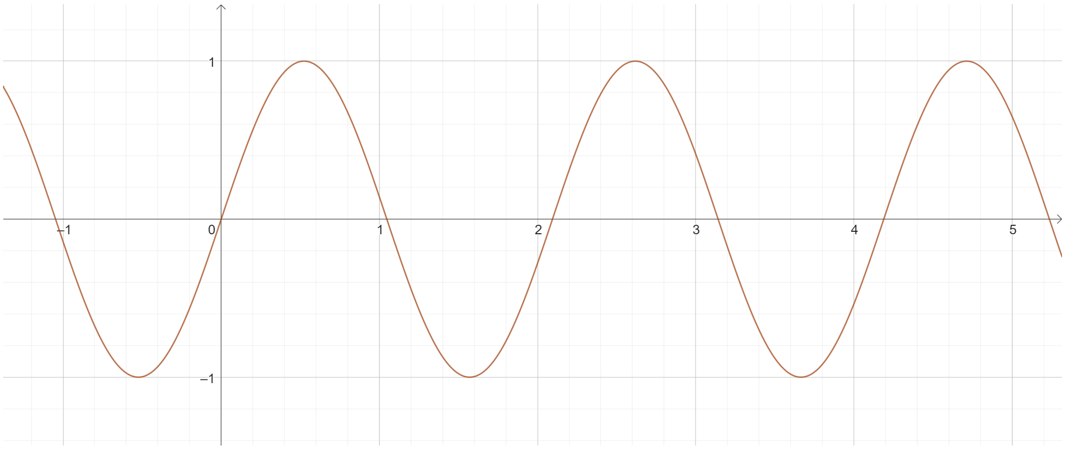


Abbildung 10: Sin(3x) Zeit-Amplitude

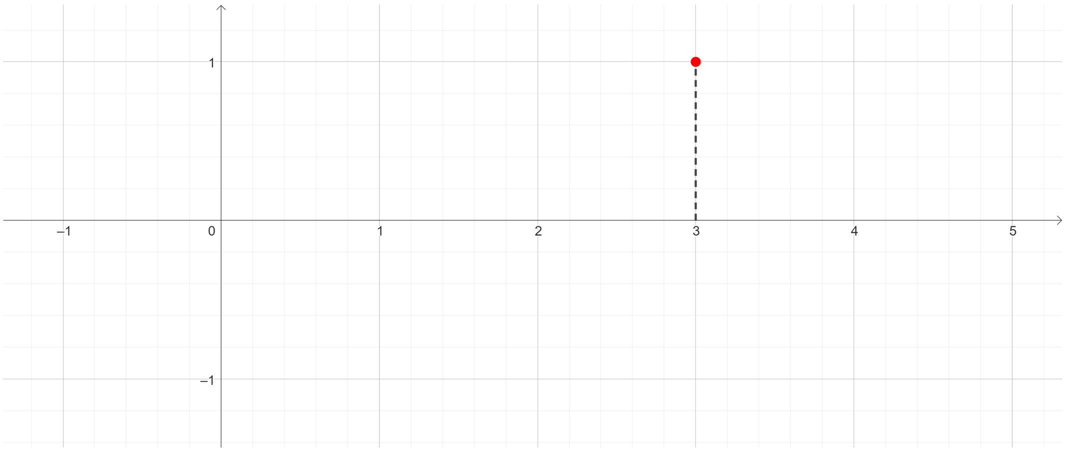


Abbildung 11: Sin(3x) Frequenz-Amplitude

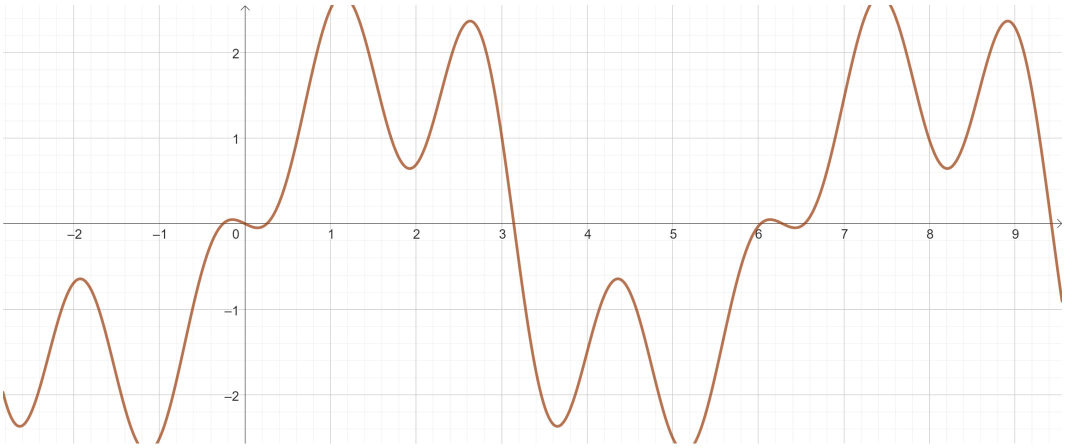


Abbildung 12: Sin Zeitdomäne

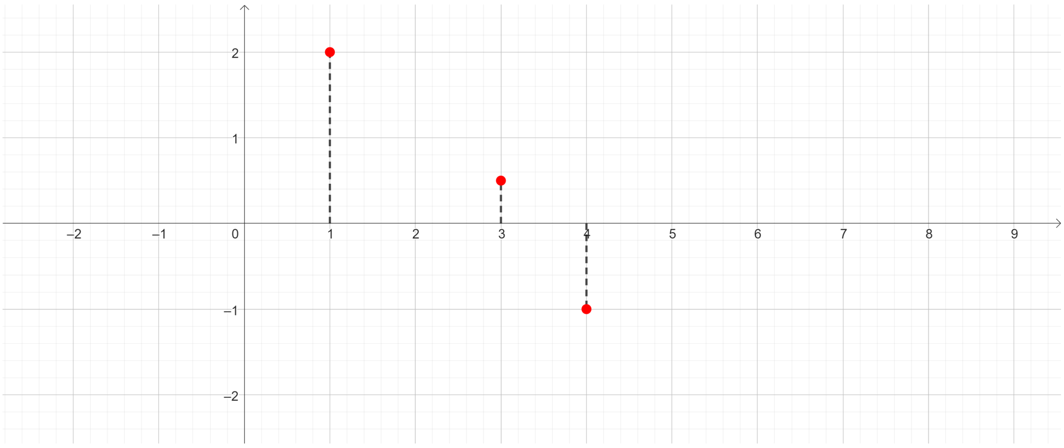


Abbildung 13: Sin Frequenzdomäne

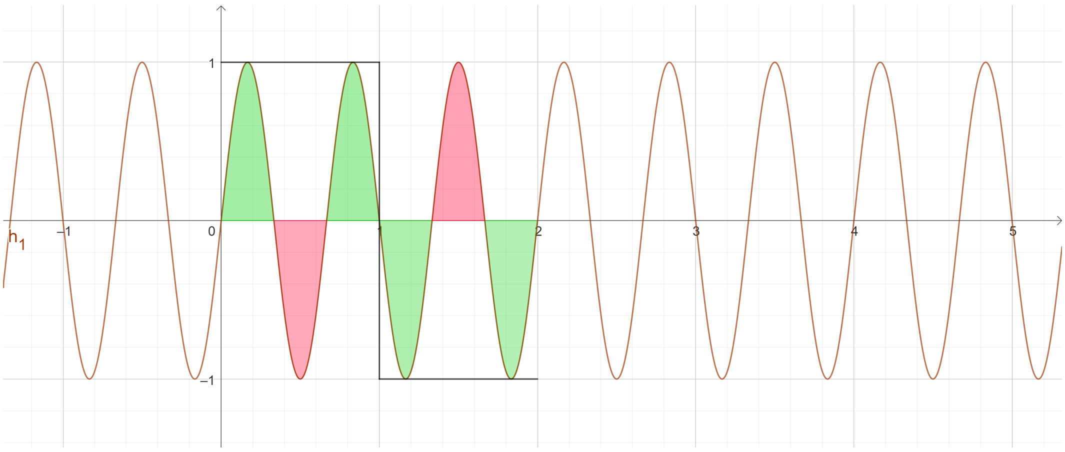


Abbildung 14: Integral Sin3x und eckige Funktion

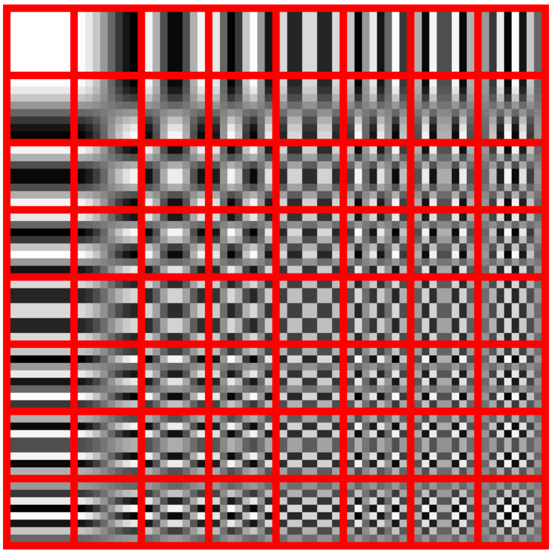


Abbildung 15: DCT Grundbilder

Quelle: *https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Dctjpeg.png*

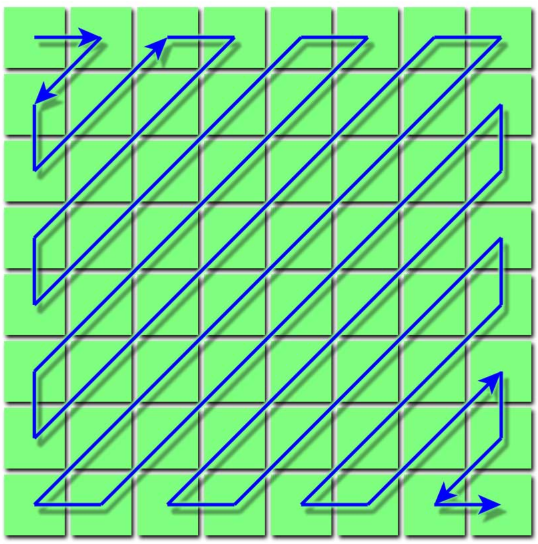


Abbildung 16: Huffman ZickZack

Quelle: *https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:JPEG_ZigZag.jpg*

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 22. Mai 2023

Vorname Nachname

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 22. Mai 2023

Vorname Nachname