



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Matrizen - ein Werkzeug zur Untersuchung von Populationen

Enrik Pollmann

NOTE: _____

PUNKTZAHL: _____

UNTERSCHRIFT DES KURSLEITERS

5. Juni 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Fragestellung / Zielsetzung	2
1.2	Anwendungsgebiete	2
1.3	Untersuchungsgebiet	2
1.4	Definitionen[1]	2
1.4.1	Population	2
1.4.2	Altersgruppen	2
1.4.3	Überlebensrate	3
1.4.4	Fortpflanzungsrate	3
1.5	Vorausgesetzte Grundlagen	3
2	Hauptteil	4
2.1	Populationsmatrizen erklärt	4
2.1.1	Struktur einer Populationsmatrix	4
2.1.2	Rechnen mit einer Populationsmatrix	4
2.2	Beispiel 1	6
2.2.1	Erstellen einer Populationsmatrix	6
2.2.2	Populationsentwicklung berechnen	6
2.2.3	Entwicklung visuell darstellen	7
2.3	Beispiel 2	8
2.3.1	Erstellen der Populationsmatrix	8
2.3.2	Populationsentwicklung berechnen	8
2.3.3	Entwicklung visuell darstellen	8
2.4	Dynamik von Populationen	10
2.4.1	Wann ist eine Population stabil?	10
2.4.2	Wann stirbt eine Population aus?	12
2.4.3	Wann wächst eine Population?	13
2.4.4	Beschränktes Wachstum	14
2.5	Schwäche	14
3	Schluss	14
3.1	Zusammenfassung / Rückschluss	14
4	Anhang	16

1 Einleitung

1.1 Fragestellung / Zielsetzung

Wo liegen die Grenzen von Bevölkerungsprognosen mit Matrizen?

1.2 Anwendungsgebiete

Es lassen sich diverse Gebiete finden, in denen Populationsmatrizen zum Einsatz kommen. Sie werden häufig in der Ökologie, Biologie, Epidemiologie und anderen Bereichen verwendet, um die Auswirkungen von Veränderungen in der Umwelt oder in der menschlichen Gesellschaft auf die Populationsdynamik zu verstehen. Ebenso sind sie auch ein wichtiger Bestandteil in der Entwicklung von Populationsmodellen und Prognosen.

1.3 Untersuchungsgebiet

Untersuchen lassen sich die Populationsentwicklungen von Lebensformen wie Tieren und Menschen oder auch die von Pilzen und Bakterien. In dieser Facharbeit wird die Betrachtung von Populationen auf die der weiblichen Individuen einer Art beschränkt. Es wird angenommen, dass sich der männliche Teil dieser Art ähnlich entwickelt.

1.4 Definitionen[1]

1.4.1 Population

Als Population wird in der Mathematik der Bestand an Individuen zu einem bestimmten Zeitpunkt bezeichnet. Nach einer festgelegten Zeitperiode erfolgt der Übergang in die nächste Altersgruppe und ein neuer Bestand kann ermittelt werden. Das bedeutet, dass zwischen den einzelnen Schritten des Bevölkerungswachstums oder der Bevölkerungsabnahme Populationen festgestellt werden können, diese werden in jedem Fall in ganzen Zahlen angegeben.

1.4.2 Altersgruppen

Beim Prognostizieren von Populationen werden die Individuen in unterschiedliche Altersgruppen unterteilt. Diese können verschiedene Merkmale in Form von Überlebens- und Fortpflanzungsraten aufweisen.

1.4.3 Überlebensrate

Die Überlebensrate beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Individuum den Übergang in die nächste Altersgruppe überlebt. Gleichzeitig wird damit also auch der Anteil einer bestehenden Altersgruppe beschrieben, der statistisch gesehen den Übergang in die nächste schaffen wird.

Es gilt also: Je höher die Überlebensrate, desto mehr Individuen schaffen es in die nächste Altersgruppe.

Dabei ist zu beachten, dass die Überlebensrate einer Altersgruppe 0 erreichen kann, wenn die untersuchten Individuen ihr Höchstalter erreicht haben. Dies ist auch der Fall, wenn die Matrix nach einer bestimmten Anzahl von Altersgruppen endet.

1.4.4 Fortpflanzungsrate

Als Fortpflanzungsrate wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, mit der ein Individuum sich fortpflanzen kann. Überschreitet die Fortpflanzungsrate den Wert 0, dann wird sinngemäß nicht mehr die Wahrscheinlichkeit angegeben, mit der ein Individuum sich fortpflanzt, sondern die durchschnittliche Anzahl an Kindern die geboren werden.

Es gilt folglich: Je höher die Fortpflanzungsrate, desto mehr Nachkömmlinge werden geboren.

Dabei ist zu beachten, dass nur bestimmte Altersgruppen dazu in der Lage sind sich fortzupflanzen.

1.5 Vorausgesetzte Grundlagen

Folgende Kenntnisse und Grundlagen der Mathematik werden vorausgesetzt, um mit Populationsmatrizen als Instrument zum Treffen von Prognosen umzugehen:

- Grundlegende lineare Algebra (Kenntnisse über Struktur von Matrizen und Vektoren)
- Rechnen mit Matrizen und Vektoren (zum Beispiel Multiplikation von Vektoren)
- Eigenwerte und Eigenvektoren

2 Hauptteil

2.1 Populationsmatrizen erklärt

2.1.1 Struktur einer Populationsmatrix

Folgend steht ein Beispiel für eine Populationsmatrix, auch Lesliematrix genannt: [2]

$$L = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{c} & \textcolor{green}{a} & \textcolor{blue}{b} \\ \textcolor{violet}{u} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{blue}{v} & 0 \end{pmatrix}$$

$\textcolor{red}{c}$ =Fortpflanzungsrate der 1. Altersgruppe
 $\textcolor{green}{a}$ =Fortpflanzungsrate der 2. Altersgruppe
 $\textcolor{blue}{b}$ =Fortpflanzungsrate der 3. Altersgruppe
 $\textcolor{violet}{u}$ =Überlebensrate der 1. Altersgruppe
 $\textcolor{blue}{v}$ =Überlebensrate der 2. Altersgruppe

Für die gegebene Anfangspopulation an dem Zeitpunkt 0 gilt:

$$A_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_0 = \text{Anfangspopulation an Individuen 1. Altersgruppe} \\ y_0 = \text{Anfangspopulation an Individuen 2. Altersgruppe} \\ z_0 = \text{Anfangspopulation an Individuen 3. Altersgruppe} \end{array}$$

Der gesamte Bestand lässt sich folglich berechnen als:

$$A_0 = x_0 + y_0 + z_0$$

2.1.2 Rechnen mit einer Populationsmatrix

Werden vereinfacht nur Alterungsprozesse betrachtet gilt:

Altersgruppe	Zeitintervall	0	t	2 · t	3 · t	Ist ein Individuum zwischen eingeschlossen 0 und ausgeschlossen t Jahren alt, so gehört es zur 1. Altersgruppe usw.
1	[0;t[	x_0	0	0	0	
2	[t;2 · t[	y_0	x_0	0	0	
3	[2 · t;3 · t[	z_0	y_0	x_0	0	

Wird einer gegebenen Population die Fähigkeit zur Fortpflanzung genommen, und bleiben andere mögliche Todesursachen neben dem Tod durch Altersschwäche außer Betracht, stirbt diese also nach drei Zeitintervallen t aus.

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Matrix nach Ergänzung der Fortpflanzungsraten.

Altersgruppe	Zeitintervall	0	t	2 · t
1	[0;t[	x_0	$x_t = c \cdot x_0 + a \cdot y_0 + b \cdot z_0$	$x_{2t} = c \cdot x_t + a \cdot y_t + b \cdot z_t$
2	[t;2 · t[	y_0	$y_t = x_0$	$y_{2t} = x_t$
3	[2 · t;3 · t[	z_0	$z_t = y_0$	$z_{2t} = x_0$

Des Weiteren zeigt die Tabelle, wie die Altersgruppe 1 altert und in den fol-

genden Generationen die Populationen der anderen Altersgruppen bildet. Im Gegensatz zur vorhergehenden Tabelle werden keine leere Generationen zurückgelassen. Jetzt werden neue Individuen in die 1. Altersgruppe hineingeboren.

Die Geburten werden berechnet, indem die Population einer Altersgruppe mit der dazugehörigen Geburtenrate multipliziert und diese Werte für alle Altersgruppen addiert werden. Dabei ist zu beachten, dass nach für die Berechnung der 3. Generation auch die Populationen der zuvor berechneten 2. Generation verwendet werden muss.

Berücksichtigung finden muss die Tatsache, dass Individuen eines natürlichen Todes sterben und den Übergang in die folgende Altersgruppe somit nicht überleben. Für diese Prognose werden die Koeffizienten u und v in die Rechnung eingebunden.

Altersgruppe	Zeitintervall	0	t	$2 \cdot t$
1	$[0;t[$	x_0	$x_t = c \cdot x_0 + a \cdot y_0 + b \cdot z_0$	$x_{2t} = c \cdot x_t + a \cdot y_t + b \cdot z_t$
2	$[t;2 \cdot t[$	y_0	$y_t = u \cdot x_0$	$y_{2t} = u \cdot x_t$
3	$[2 \cdot t;3 \cdot t[$	z_0	$z_t = v \cdot y_0$	$z_{2t} = v \cdot x_0$

Um den Sterbeprozess einer Population auf eine Altersgruppe anzuwenden wird die Altersgruppe, die in die nächste wechselt, mit dem dazugehörigem Koeffizienten multipliziert.

Die Matrix L um die Population ausgehend vom Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt t zu beschreiben setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{pmatrix} c \cdot x_0 & a \cdot y_0 & b \cdot z_0 \\ u \cdot x_0 \\ v \cdot y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich folgende allgemeine Formel für die Population zum Zeitpunkt t :

$$A_t = L \cdot A_0$$

Folgende Formel kann dazu angewendet werden, um die Population für den Zeitpunkt A_{nt} zu berechnen:

$$A_{nt} = L^n \cdot A_0$$

Dementsprechend ist es möglich die Population zu einem beliebigen Zeitpunkt $n \cdot t$ anhand der gegebenen Koeffizienten und einer gegebenen Anfangspopulation zu berechnen. Zu beachten ist dabei, dass Prognosen über lange Zeiträume, die mit dieser Methode berechnet werden, stark von der Realität abweichen können, da sich die Koeffizienten im Laufe der Zeit nicht ändern.

2.2 Beispiel 1

2.2.1 Erstellen einer Populationsmatrix

Die Anwendung der erarbeiteten Populationsmatrix wird nachfolgend an der Population von Schmetterlingen dargestellt:

Die Schmetterlingsgattung entwickelt sich in 3 Phasen. Aus den Eiern (1. Altersgruppe) werden nach einem Monat Raupen (2. Altersgruppe) und nach einem weiteren Monat entpuppen sich die Schmetterlinge (3. Altersgruppe). Diese sind in der Lage, Eier zu legen.

Es ist davon auszugehen, dass durchschnittlich aus einem Viertel der Eier Raupen schlüpfen und dass etwa die Hälfte aller Raupen es schaffen, sich als Schmetterlinge zu entpuppen. Die Schmetterlinge legen pro Monat ca. 8 Eier, bevor sie sterben. Zum Zeitpunkt 0 gibt es 40 Eier, 40 Raupen und 40 Schmetterlinge. Daraus ergibt sich folgende Matrix und Gleichung für die Population des ersten Monats A_1 : [3]

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Populationsentwicklung berechnen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich, dass es im folgenden Monat in etwa 320 Eier, 10 Raupen und 20 Schmetterlinge geben wird. Wenn nun die Population für den 2. Monat gefragt ist, kann sowohl mit der Population des 1. Monats weitergerechnet, als auch die eben genannte direkte Formel angewendet werden:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 320 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Im 2. Monat gibt es dementsprechend 160 Eier, 80 Raupen und 5 Schmetterlinge.

Folgend gilt für A_3 :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Zu erkennen ist, dass die Population nach 3 Monaten wieder auf dem gleichen Niveau ist wie zu Zeitpunkt 0 und dass die Verteilung der gesamten Population

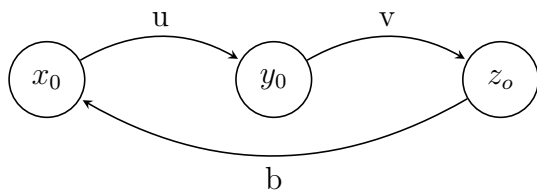
auf die Altersgruppen ebenfalls identisch ist. In einem solchen Fall wird von einer zyklischen Entwicklung gesprochen. Auf diese Eigenschaft einer Population wird später noch Bezug genommen.

2.2.3 Entwicklung visuell darstellen

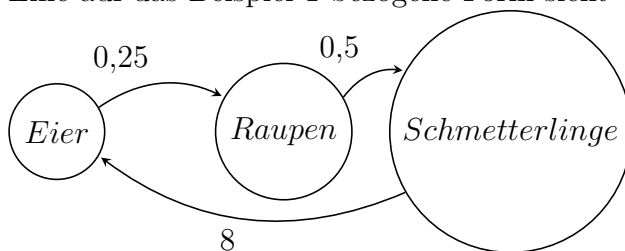
Die Populationsentwicklung wird folgend auf zwei verschiedene Arten dargestellt:

- Die Matrix aus dem Beispiel 1 kann als Übergangsmatrix für Austauschprozesse genutzt werden, um den Prozess und die Zahlen zu veranschaulichen.

Eine allgemeine Form kann wie folgt aussehen:



Eine auf das Beispiel 1 bezogene Form sieht wie folgt aus:



- Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Populationen jeder Generation gesamt oder einzeln für die Altersgruppen zu erfassen und als Graphen darzustellen.

Für das gegebene Fachbeispiel sieht ein Graph der die gesamte Population jeder Generation erfasst wie folgt aus:

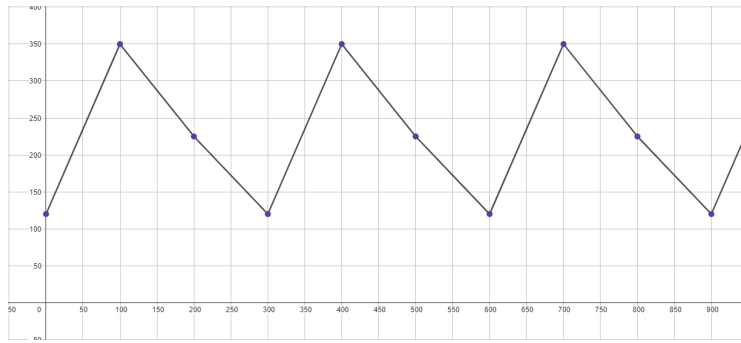


Abbildung 1: Gesamtpopulation - Schmetterlingsgattung

Der Graph veranschaulicht die Gesamtpopulation der Schmetterlingsgattung. Die Skalierung der x-Achse wird vereinhunderfacht, um den Graphen ersichtlicher zu gestalten. Gut zu erkennen ist, dass es sich bei der Population um eine stabile handelt. Auch zu erkennen ist, dass sich der Verlauf des Graphen stetig wiederholt, man spricht von einem zyklischen Prozess.

2.3 Beispiel 2

2.3.1 Erstellen der Populationsmatrix

Für ein 2. Beispiel soll folgende Matrix L mit der Startpopulation A_0 betrachtet werden:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

[3]

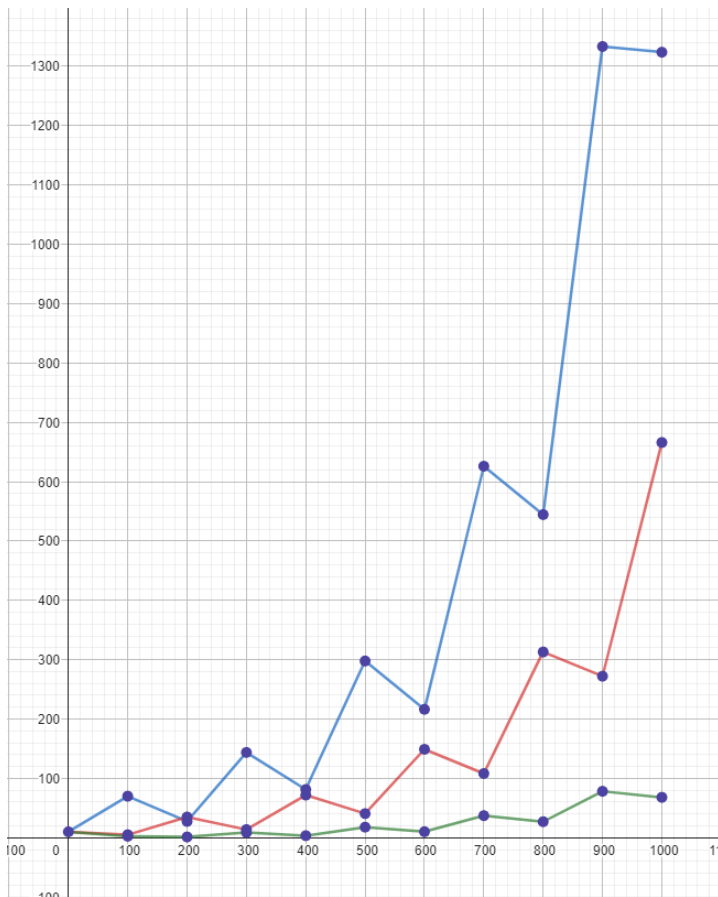
2.3.2 Populationsentwicklung berechnen

Um die Populationsentwicklung zu berechnen, wird weiterhin folgende Formel angewendet:

$$E_n = L^n \cdot E_0 \longrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Entwicklung visuell darstellen

Wird nun der Bestand der einzelnen Altergruppen aus Beispiel 2 als Graph dargestellt, sieht dies wie folgt aus:

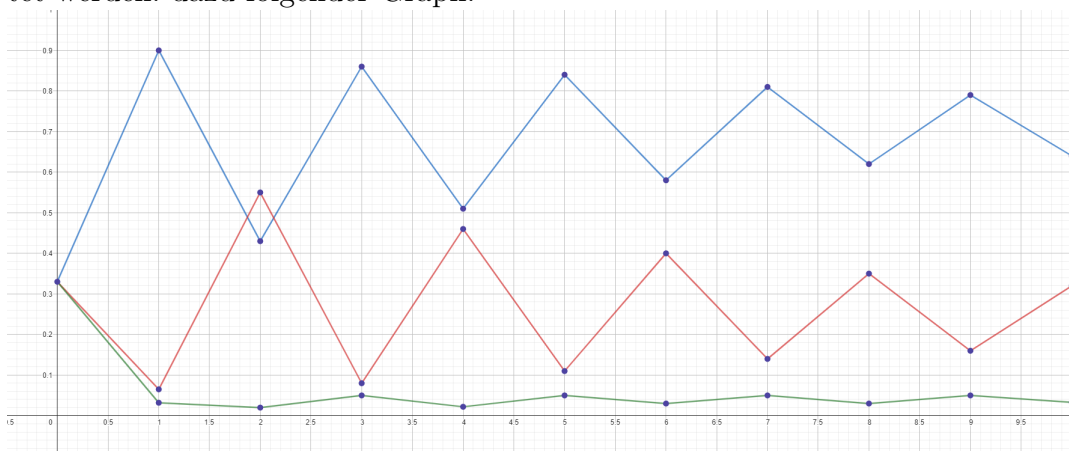


In blau ist der Bestand der 1. Altersgruppe gegeben.
 In rot ist der Bestand der 2. Altersgruppe gegeben.
 In grün ist der Bestand der 3. Altersgruppe gegeben.

Abbildung 2: Bestand der Altersgruppen - Beispiel 2

In der Grafik lässt sich die Bestandsentwicklung der einzelnen Altersgruppen verfolgen. Es ist zu erkennen, dass der gesamte Bestand der Population exponentiell ansteigt.

Besondere Eigenschaften der Populationsentwicklung werden deutlich, wenn die prozentualen Anteile der Altersgruppen an der Gesamtpopulation betrachtet werden. dazu folgender Graph:



Verfolgt man den Verlauf der Graphen, so ist zu erkennen, dass die prozentualen Anteile der Altersgruppen sich immer weiter auf einen jeweiligen Wert annähern. Es ist also zu vermuten, dass die Werte konvergent sind. Der Vektor

mit dem dieses final erreichte Verhältnis angegeben wird, heißt Grenzvektor (oder Fixvektor) und lässt sich allgemein wie folgt berechnen: [3]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,24 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

2.4 Dynamik von Populationen

2.4.1 Wann ist eine Population stabil?

Eine Population gilt als stabil, wenn sich der Bestand über einen Zeitraum gar nicht oder nur geringfügig ändert. Wie die Population der Schmetterlingsgattung aus Beispiel 1 zeigt, denn diese erreicht alle drei Monate wieder den ursprünglichen Bestand.

Es gilt also folglich:

$$A_0 = A_3$$

Fraglich ist, warum genau diese Population mit genau diesen Eigenschaften stabil ist und woran man dies erkennen kann.

Zur besseren Darstellung wird die zuvor aufgestellte Formel zur Berechnung von A_0 in die oben aufgestellte Gleichung eingesetzt - dies sieht dann wie folgt aus:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Damit das Produkt von einer quadratischen Matrix (hier L) und einem Vektor wieder gleich dem Vektor ist, muss eine Matrix zwingend gleich der Einheitsmatrix E sein.

Es gilt also Folgendes:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Bedingung für eine stabile Entwicklung einer Population ist also, dass Folgendes gilt: [4]

$$L^3 = E \text{ oder } b \cdot u \cdot v = 1$$

Dies gilt jedoch nur, wenn L folgende Form hat:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass hergeleitete Formel nur gilt, wenn ausschließlich die dritte Altersgruppe dazu in der Lage ist sich fortzupflanzen.

Um das Verhalten einer Population mit der Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen, müssen vorher erschlossene Erkenntnisse und solche aus Beispiel 2 herangezogen werden. Es gilt also Folgendes:

$$A_1 = L \cdot A_0$$

$$A_3 = L^3 \cdot A_0$$

Außerdem fällt nach genauerer Betrachtung auf:

$$L^3 = a \cdot u \cdot L$$

Durch Einsetzen resultiert:

$$A_3 = a \cdot u \cdot L \cdot A_0$$

Abschließend:

$$A_3 = a \cdot u \cdot A_1$$

Die Erkenntnis, die aus diesem Zusammenhang gezogen werden kann, ist, dass die relativen Anteile von A_1 und A_3 gleich groß sind. Dies ist auch in der Grafik aus Beispiel 2 zu erkennen. Der Zusammenhang ist zu Beginn des Verlaufs jedoch nicht vollkommen genau - erst im weiteren Verlauf kann Gleichheit festgestellt werden - für die Anwendung reicht dies jedoch aus. Wenn nun der Bestand der Population zu besagten Zeitpunkten berechnet wird und kein signifikanter Abfall der Population festzustellen ist, dann kann die Aussage getroffen werden, dass die Population stabil ist.

Wenn die relativen Anteile der Altersgruppen an einer Population gleich groß, oder auch nur fast gleich groß sind, und der Bestand auch nahezu identisch ist, gilt die Population als stabil.

Für die Bestimmung des Grenzverhaltens einer Matrix für die $a \cdot b \neq 0$ oder $c \cdot a \cdot b \neq 0$ zutrifft, gilt folgende Formel:

$$L \cdot A_n \approx \lambda_1 \cdot A_n$$

Die Herleitung zu dieser Formel wird ausführlich in einem Artikel von Jörg Meyer [3] durchgeführt und soll hier aufgrund des Umfangs nicht extra aufgeführt werden.

Aus der Gleichung kann geschlossen werden, dass die Matrix in der Rechnung durch den jeweiligen Eigenwert ersetzt werden kann. Somit lässt sich schlussfolgern: Wenn der Eigenwert λ der Matrix L den Betrag 1 hat, so bleibt der Bestand der Population stabil.

Zu beachten ist dabei, dass die Rechnung mit Eigenwerten erst gegen große Werte von n zuverlässig ist. Die Berechnung einzelner Werte ist über Eigenwerte ebenfalls unzuverlässig und kann ungenau sein.

Für Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} c & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

kann das Grenzwertverhalten ebenfalls über den Eigenwert von L überprüft werden.

2.4.2 Wann stirbt eine Population aus?

Vorerst wird weiterhin der Sonderfall für die Situation betrachtet, dass nur die 3. Altersgruppe dazu in der Lage ist, sich fortzupflanzen, es gilt also wieder:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

Grundlegend werden hier die gleichen Erkenntnisse hinzugezogen wie auch schon bei der stabilen Population. Um festzustellen, ob bei einer Population die Gefahr besteht, auszusterben, werden wieder die Werte der Hauptdiagonalen der Matrix L^3 betrachtet:

$$L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} b \cdot u \cdot v & 0 & 0 \\ 0 & b \cdot u \cdot v & 0 \\ 0 & 0 & b \cdot u \cdot v \end{pmatrix}$$

Für eine stabile Population muss vorausgesetzt werden, dass $b \cdot u \cdot v = 1$ gilt. Damit eine Population hingegen wächst, muss Folgendes gelten: [4]

$$b \cdot u \cdot v < 1$$

Wird der Sonderfall betrachtet, dass inhaltlich gesehen nur die 2. Altersgruppe dazu in der Lage ist, sich fortzupflanzen, gilt für L :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

Die Erkenntnisse des stabilen Populationsverhaltens werden hinzugezogen. Es wird die Verteilung der gesamten Population unter den Altersgruppen betrachtet, sodass gilt:

$$A_3 = a \cdot u \cdot A_1$$

Damit eine Population als stabil gelten, kann muss gelten, dass sie den gleichen

Bestand zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 3$ hat. Eine Population stirbt folglich aus wenn der Bestand zum Zeitpunkt $t = 3$ geringer ist als zum Zeitpunkt $t = 1$

Für eine Matrix der Form

$$L = \begin{pmatrix} c & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

werden Erkenntnisse der Gleichung

$$L \cdot A_n \approx \lambda_1 \cdot A_n$$

hinzugezogen. Trifft die Ungleichung $\lambda_1 < 1$ zu, so verringert sich die Population im Laufe der Zeit - Die Population stirbt schließlich aus.

Diese Erkenntnis gilt auch für Matrizen der Form:

$$L = \begin{pmatrix} c & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.3 Wann wächst eine Population?

Wird der Sonderfall

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet, sodass gilt:

$$L^3 = E$$

So setzt sich das Muster des Populationsverhalten fort. Eine Population wächst exponentiell an, wenn Folgendes gilt: [4]

$$b \cdot u \cdot v > 1$$

Wird der Sonderfall

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet, dann gilt:

$$A_3 = a \cdot u \cdot A_1$$

Da eine Population als stabil gilt, wenn die Population zum Zeitpunkt $t = 1$ mit der zum Zeitpunkt $t = 3$ übereinstimmt und ausstirbt, wenn sie zum Zeitpunkt $t = 3$ deutlich geringer ist, wächst sie dementsprechend exponentiell an, wenn sie zum Zeitpunkt $t = 3$ deutlich größer ist als zum Zeitpunkt $t = 1$

Für Matrizen mit der Form

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } L = \begin{pmatrix} c & a & b \\ u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

gelten die gleichen Regeln auf Basis der Gleichung $L \cdot A_n \approx \lambda_1 \cdot A_n$ wie zuvor. Trifft die Ungleichung $\lambda_1 > 1$ zu, so wächst die Population exponentiell an.

2.4.4 Beschränktes Wachstum

Es gibt keine direkte Möglichkeit ein beschränktes Populationswachstum mit Hilfe von Leslie-Matrizen darzustellen. Es ist durchaus möglich einfach davon auszugehen, dass die Population im beschränkten Raum sich identisch zu der im freien Raum entwickelt und dass ab erreichtem Grenzwert die Rechnung beendet wird. Eine Möglichkeit einen Verlauf mit Hilfe von Eigenwerten und Änderungen an Vektoren zu approximieren ist es, den Funktionsterm für eine Kurve des logarithmischen Wachstums zu bestimmen. Hierbei kann es aufgrund der Verwendung von Eigenwerten zu Ungenauigkeiten kommen.

2.5 Schwäche

Eine bereits bekannte Schwäche der Prognostizierung von Populationsentwicklung durch Leslie-Matrizen ist der lineare Verlauf der Koeffizienten. Das bedeutet, dass die Koeffizienten im Laufe der Rechnung konstant bleiben und sich nicht fortwährend anpassen können. Dass eine Population oder eine bestimmte Altersgruppe im Laufe der Zeit fruchtbarer oder sterblicher wird, kann durch Leslie-Matrizen nur durch äußerst großen Aufwand simuliert werden. Eine manuelle Anpassung der Koeffizienten vor jedem Rechenschritt wäre notwendig.

3 Schluss

3.1 Zusammenfassung / Rückschluss

Zusammengefasst kann gesagt werden, dass es über Leslie-Matrizen durchaus möglich ist, Prognosen zu der Entwicklung von Populationen zu treffen. Es kann mit Sicherheit ohne großen Rechenaufwand bestimmt werden, wie das Grenzverhalten von Populationen sich verhält, ob eine Population anwächst oder doch ausstirbt. Ebenso ist die Bestimmung von einzelnen Beständen von Population zu jedem Zeitpunkt möglich.

Die Grenzen von Bevölkerungsprognosen mit Matrizen liegen bei der Simulation von Population für Individuen im beschränkten Raum. Voraussetzungen für eine geeignete Lösung wäre die fortwährende Abänderung der Koeffizienten wie zum Beispiel bei logarithmischem Wachstum. Bei Leslie-Matrizen

kann dies nur durch aufwändige manuelle Eingabe der Werte erzielt werden und findet somit kaum praktischen Gebrauch.

4 Anhang

Literatur

- [1] H. Schneebeili, „Populationsmodelle, Graphen und Matrizen,“ 2012. Adresse: https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik/Populationsmodelle,%20Graphen%20und%20Matrizen/pop_mod.pdf.
- [2] P. H. Leslie, „On the use of matrices in certain population mathematics,“ *Biometrika*, Jg. 33, Nr. 3, S. 183–212, 1945.
- [3] J. Meyer, „Über dreireihige LESLIE-Matrizen,“ Der Mathematikunterricht, 2012.
- [4] „Populationsprozesse.“ (), Adresse: <https://www.studyhelp.de/online-lernen/mathe/populationsprozesse/> (besucht am 23.03.2023).

Abbildungsverzeichnis

1	Gesamtpopulation - Schmetterlingsgattung	8
2	Bestand der Altersgruppen - Beispiel 2	9

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 5. Juni 2023

Vorname Nachname

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 5. Juni 2023

Vorname Nachname