

Mathematik B-Tag 2023

Aufgabe 2:

a)

Die Reihe 100 1 99 benötigt hundert schritte, bis diese zyklisch wird.

Man muss drei Zahlen auswählen, die unterschiedlich sind.

Sei eine Reihe mit $n=3$

$a \ b \ c$

Für die größte Länge gilt:

$|a - b|$ muss möglichst groß sein

$|b - c|$ muss ebenfalls möglichst groß sein

$|c - a|$ muss möglichst klein sein

b)

Die Höchstzahl an Zeilen ist 13 mit 2704 Kombinationen (Siehe Java-Code)

Aufgabe 3:

a)

Durch den Betrag gibt es keine negativen Zahlen. Es gelten also die Regeln der Subtraktion von natürlichen Zahlen. Somit muss die Differenz kleiner werden oder bleibt gleich.

b)

Bei einer erlishten Reihe kommt die letzte Zeile immer wieder vor. Beispielsweise folgt auf 0 0 0 0 wieder die Zeile 0 0 0 0.

Bei einer zyklischen Reihe kommt die wiederkehrende Zeile nicht direkt im nächsten Schritt wieder vor. Zwischen den identischen Zeilen wiederholen sich die Folgen immer wieder. Beispielsweise 1 1 0 ... 1 1 0

c)

Eine Zahl x kann bei einer Reihe mit $n = 4$ nur vier verschiedene Plätze in der Zeile einnehmen. Nach spätestens vier (allgemein n) Schritten würden die dabei neu entstandenen Zahlen Einfluss auf x haben, dass die Reihe entweder erlischt oder zyklisch wird.

x	0	0	0
x	0	0	x
x	0	x	0
x	x	x	x
0	0	0	0

Aufgabe 4:

a)

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

b)

Wenn n ungerade ist, dann ist die Reihe zyklisch.

Wenn n gerade ist, dann erlischt die Reihe.

c)

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1
0	0	0	0

d)

Es kommt nur k und 0 vor, sodass die Reihe genau wie bei 1 verläuft.

Aufgabe 5:

a)

Bei einer Reihe, die nur aus Nullen und einer anderen Zahl a besteht, gibt es 4 mögliche „Nachbarpaare“ (wenn man die Reihenfolge beachtet):

a und a ; 0 und 0; a und 0 sowie 0 und a .

$$a - a = 0$$

$$0 - 0 = 0$$

$$|a - 0| = |0 - a| = a$$

In jedem Fall ist also die Differenz, welche Teil der nächsten Folge wird, a oder 0, sodass die nächste Folge wieder nur aus a und 0 besteht.

Aufgabe 6:

a)

Ein möglicher Vorgänger zu 6 3 2 5 lautet 0 6 3 5.

Alle Reihen a_1 a_2 a_3 a_4 , für die folgendes gilt,

$$a_1 = a_2 \pm 6$$

$$a_2 = a_3 \pm 3$$

$$a_3 = a_4 \pm 2$$

$$a_4 = a_1 \pm 5$$

sind Vorgänger von 0 6 3 5.

b)

Eine Folge b_1, b_2, b_3, b_4 hat nur dann einen Vorgänger a_1, a_2, a_3, a_4 , wenn es eine Auswahl von „±“-Zeichen gibt, sodass $\pm b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm b_4 = 0$. Im Folgenden wird dies bewiesen.

$$\begin{array}{lcl} a_1 = a_2 \pm b_1 & a_4 = a_1 \pm b_4 & \\ a_2 = a_3 \pm b_2 & a_3 = a_1 \pm b_4 \pm b_3 & \\ a_3 = a_4 \pm b_3 & \Rightarrow a_2 = a_1 \pm b_4 \pm b_3 \pm b_2 & \\ a_4 = a_1 \pm b_4 & a_1 = a_1 \pm b_4 \pm b_3 \pm b_2 \pm b_1 & \\ & 0 = \pm b_4 \pm b_3 \pm b_2 \pm b_1 & \end{array}$$

c)

$$\sum_{i=1}^n \pm b_i = 0$$

Forschung 1:

a)

(Siehe Code)

b) Für die Starter und Endzahlen gilt, dass ...

Dass die

c)

Code:

```
public class Zahlenrechner
{
    public int Zahlenstuff(){
        int zaehlermax = 0;
        for(int a=0; a<100; a++){
            for(int b=0; b<100; b++){
                for(int c=0; c<100; c++){
                    for(int d=0; d<100; d++){
                        int ausgabe = Rechner(a, b, c, d, 0);
                        if(ausgabe >= zaehlermax){
                            System.out.print(" a: " + a);
                            System.out.print(" b: " + b);
                            System.out.print(" c: " + c);
                            System.out.print(" d: " + d);
                            System.out.println(" Zähler:" + ausgabe);
                            zaehlermax = ausgabe;
                        }
                    }
                }
            }
        }
        return zaehlermax;
    }
    private int Rechner(int a, int b, int c, int d, int zaehler){
        int aNeu = Math.abs(a-b);
        int bNeu = Math.abs(b-c);
        int cNeu = Math.abs(c-d);
        int dNeu = Math.abs(d-a);
        zaehler++;
        if(aNeu == 0 && bNeu == 0 && cNeu == 0 && dNeu == 0){
            return(zaehler);
        }
        else{
            return(Rechner(aNeu, bNeu, cNeu, dNeu, zaehler));
        }
    }
}
```

Forschung 2: Nullbäume

Aus dem Einführungstext ist bekannt, dass eine endliche Folge ganzer positiver Zahlen eine Zeile a_1, a_2, a_3, a_4 bildet, aus der durch den Differenzenschritt ein Nachfolger b_1, b_2, b_3, b_4 mit $b_1 = |a_1 - a_2|$, $b_2 = |a_2 - a_3|$, $b_3 = |a_3 - a_4|$ und $b_4 = |a_4 - a_1|$ entsteht.

In Aufgabe 3 wird klar, dass jede Reihe irgendwann erlöscht (alle Zahlen sind null) oder zyklisch wird (Zeile besteht nur aus Nullen und einer anderen Zahl). Für unsere Forschungsarbeit ist vor allem das Erlöschen relevant.

Die Forschungsarbeit 2 beschäftigt sich mit sogenannten Nullbäumen. Das sind Diagramme, die aus Zeilen und Pfeilen bestehen, wobei die Zeilen nur Nullen und Einsen enthalten und die Pfeile jeweils den Differenzenschritt darstellen. Die letzte Zeile eines Nullbaums ist die sogenannte Nullzeile, welche nur aus Nullen besteht.

Jede Zeile im Nullbaum, die nicht die Nullzeile ist, hat keinen oder genau zwei Vorgänger. Sie hat keinen Vorgänger, wenn es keine mögliche Auswahl von „±“-Zeichen gibt, sodass $\sum_{i=1}^n \pm b_i = 0$ (aus Aufgabe 6 bekannt).

Wenn es einen Vorgänger gibt, gibt es jeweils einen weiteren Vorgänger, bei dem jede Null durch eine Eins und jede Eins durch eine Null ersetzt ist. Die „Nachbarzahlen“ Eins und Eins ergeben nämlich die gleiche Differenz wie Null und Null; Eins und Null ergeben die gleiche Differenz wie Null und Eins.

Eine Folge mit Nullen und Einsen hat nur dann einen Vorgänger, wenn es eine gerade Anzahl von Einsen gibt. Ansonsten kann $\sum_{i=1}^n \pm b_i = 0$ nicht erfüllt werden.

Für einige Längen n haben wir die Höhe $h(n)$, also die Anzahl Pfeile in einem Pfad, ermittelt.

n	$h(n)$	
2	2	$n = \text{gerade}$
3	1	$n = \text{ungerade}$
4	4	
5	1	
6	2	
7	1	
8	8	
9	1	
12	4	
14	2	
16	16	
18	2	

Ungerade Zahlen haben immer die Höhe 1. Damit eine Reihe erlischt, müssen die Zahlen immer so angeordnet werden können, dass die Zahlen 1 und 0 abwechselnd vorkommen (z.B. 1010... oder 0101.... (diese Reihenfolge ergibt 1111... und danach 0000...)) wenn n ungerade ist, kommt es mit der letzten und ersten Zahl nicht hin: $n=7$ 1010101 $\rightarrow$ 1111110, die Differenz zwischen der ersten und der letzten Zahl ist dann aber nicht Null.

Dementsprechend ist bei ungeraden Zahlen die Höhe des Baums immer 1, da es nur einen Pfeil gibt. Dieser führt von einer Reihe, die nur aus Einsen besteht, zur Nullzeile.

Bäume, für die n gerade ist, können höher werden. In dem Fall zerlegen wir n in einzelne Faktoren. Die Höhe $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$.

Für $n=18$, gilt also $h(18) = h(3) \cdot h(6) = 1 \cdot 2$

$n=18$ hat die Höhe 2