Alympiade

November 2023

Aufgabe 1

Das Schiff startet im nördlichen Ende des Kanals um 5:00 Uhr seine Fahrt. Dividiert man die Gesamtlänge des Kanals mit der Geschwindigkeit des Schiffes, ergibt sich eine Fahrzeit von 6h. $\frac{90km}{15km/h} = 6h$
Dementsprechend kommt das Schiff sechs Stunden nach der Abfahrt, also um 11:00 Uhr am südlichen Ende des Kanals an.

Aufgabe 2

Schiff Nord fährt bis zur vordersten Spitze der Bucht, also bis Kilometer 35. Es braucht für diese Zeit $\frac{35km}{15km/h} = 2\frac{1}{3}$, also 2 Stunden und 20 Minuten.
Schiff Süd muss bis Kilometermarke 34,7 km fahren, um genau neben Schiff Nord zu liegen und somit beide weiterfahren kann, es muss also $90km - 34,7km = 55,3km$ zurücklegen. Für die Strecke benötigt Schiff $\frac{55{,}3km}{15km} = 3,6867h$, also knapp 3 Stunden und 41 Minuten. Somit muss Schiff Nord 1 Stunde und 21 Minuten warten. Um die restlichen 55 Kilometer zu bewältigen, benötigt es $\frac{55km}{15km/h} = 3\frac{2}{3}h$, also 3 Stunden und 40 Minuten. Zusammengesetzt aus Fahrstrecke und Wartezeit benötig Schiff Nord also 7 Stunden und 21 Minuten, es erreicht das Kanalende also um 12:21. Zu diesem Zeitpunkt ist Schiff Süd schon lange durch. Wenn realistisch gerechnet werden soll, muss die Beschleunigung beider Schiffe noch einberechnet werden, da hier Werte nicht gegeben sind, wird dies ausgelassen.

Aufgabe 3

X-Achse: Strecke in Kilometer
Y-Achse: Zeit in Stunden

Aufgabe 4

Aus Aufgabe 2) geht hervor, dass Schiff Nord 1 Stunde und 21 Minuten warten muss. Würde es deswegen um genau diese Zeit später losfahren, also anstatt um 5:00 Uhr um 6:21 Uhr, dann könnten beide Schiffe den Kanal ohne Wartezeit passieren.

Aufgabe 5

Es ist nicht sinnvoll, wenn jede Stunde ein Schiff aus Norden in den Kanal fährt, da ein Schiff aus dem Norden 2 Stunden und 20 Minuten benötigt, um von dem Norden zu Bucht zu gelangen (siehe 2). Somit befinden sich immer zwei Schiffe aus dem Norden im Bereich zwischen dem Nordende und der Bucht, zu keinem Zeitpunkt kann also ein Schiff aus dem Süden den Kanal passieren.

Aufgabe 6

Ein Konvoi aus 6 Schiffen ist l lang.

$$l = 300m \cdot 6 + 5a| \text{ mit a: Abstand zwischen Schiffen}$$

Mit Geschwindigkeit $v = 15km/h$ und $-300m$ für das letzte Schiff ergibt sich:

$$t = \frac{1,5km + 5a}{15km/h}$$

Für die Zeit nach 0:00, wann das letzte Schiff in den Kanal einfährt.
Wenn man annimmt, dass a etwa $1,5km$ beträgt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} t =& \frac{1,5km + 5a}{15km/h} \\ =& \frac{1,5km + 5\cdot}{15km/h} \\ =& \frac{9km}{15km/h} = 3/5h = 0,6h \end{aligned}$$

Der Abstand a kann zwischen $0km$ und $5,64km$ liegen, da:

$$\begin{aligned} t =& (a_1 + l)/vkm/h \\ 4h =& (30km + 1,8km + 5a)/15km/h \\ => a =& 5,64km \end{aligned}$$

Aufgabe 7

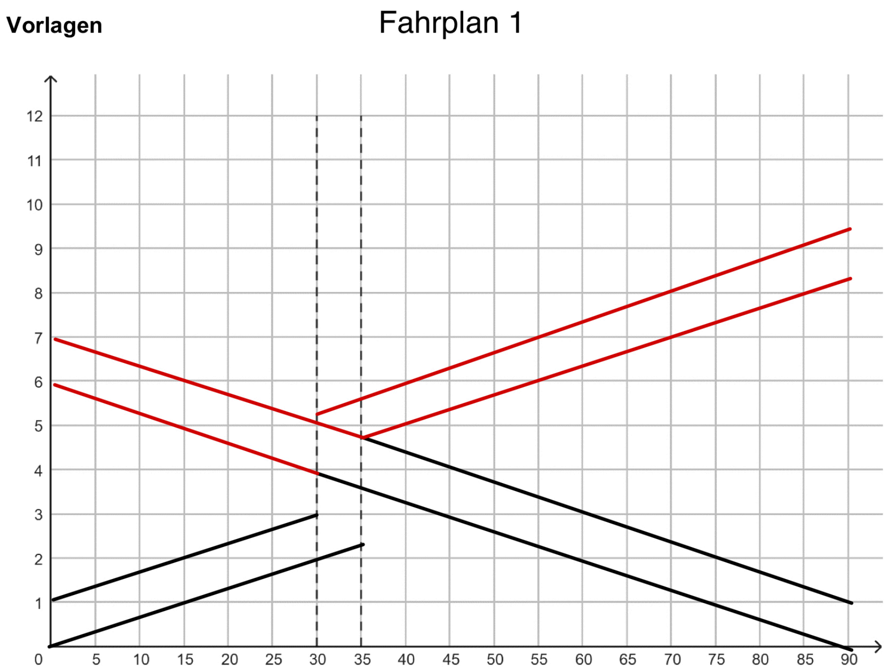
Um die Länge des Konvois anhand des Graphen zu erkennen, muss man die Distanz zwischen Anfang und Ende des Konvois am selben Zeitpunkt betrachten, also zwei Punkte des Graphen mit derselben y-Koordinate. Die Distanz lässt sich auf der x-Achse dann zwar nicht sehr präzise ablesen, wir gehen aber von 8000m aus. Damit können wir über die Gleichung

$$\begin{aligned} 8000m = 5 \cdot 300m + 5 \cdot a \\ a = 1300m \end{aligned}$$

den Abstand zwischen den Schiffen berechnen. Wir gehen dabei davon aus, dass der Graph die Position des Bugs des Schiffes beschreibt, daher muss das hintereste Schiff nicht mit einberechnet werden.

Aufgabe 9

Die ersten Schiffe des Konvois starten um 0:00 Uhr. Mit dem in Aufgabe 7) bestimmten Abstand $a = 1,3km$, lässt sich eine Konvoilänge von $1,3km \cdot 9 + 300m \cdot 10 = 14,7km$ bestimmen. Da die Schiffe alle mit genau $15km/h$ fahren, startet das letzte Schiff des Konvois also etwa 1h später, als das erste Schiff. Die erste Strecke der beiden Konvoifahrten sieht immer gleich aus (Siehe Fahrplan 1 und 2, schwarze Strecke). Die nördlich gestarteten Schiffe fahren bis zur Bucht und warten dort. Die südlich gestarteten Schiffe fahren auch bis zur Passierungsstelle. Ab hier gibt es zwei Möglichkeiten, wie die Schiffe weiterfahren können. Entweder die Schiffe aus Süden fahren ungestört durch die Passierbucht und die Schiffe aus Norden fahren erst danach weiter (Siehe Fahrplan 1).

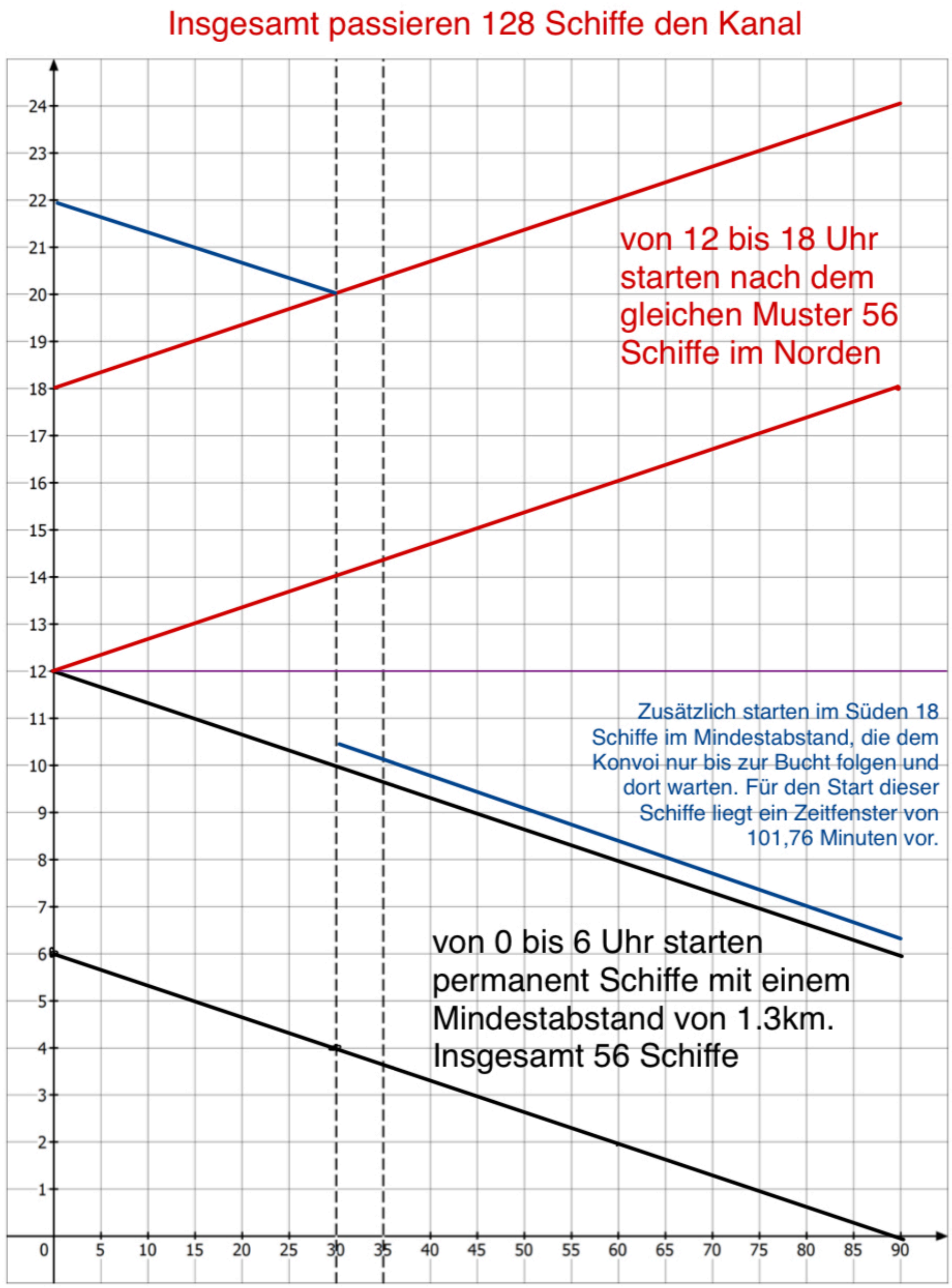


Abschlussaufgabe 1

Die meisten Schiffe können den Kanal passieren, indem alle Schiffe nur in eine Richtung fahren dürfen.

Abschlussaufgabe 2

In der Realität ist es natürlich vollkommen sinnlos, wenn ein solcher Kanal zur Einbahnstraße wird. Daher haben wir uns hier eine Taktung überlegt, die ohne Anpassungen des Kanals arbeitet und in beide Richtungen Schiffe erlaubt. **Rechnung**



Start der Schiffe:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Mindestabstand + Schifflänge}}{\text{Geschwindigkeit}} &= \text{Zeit, die zwischen Schiffstarts liegt} \\
&= \frac{1.3km + 0.3km}{15km/h} = 0.106h = 6.36min \\
\frac{\text{Länge des Startfensters}}{\text{Zeit der Schiffstarts}} &= \text{Anzahl Schiffe, innterhalb Zeitfenster} \\
&= \frac{360min}{6.36minuten} = 56,6
\end{aligned}$$

Es folgt: Innerhalb eines Startfensters von 6h können 56 Schiffe den Kanal betreten.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{Länge der Bucht}}{\text{Schifflänge}} &= \text{max Anzahl Schiffe in Bucht} \\
&= \frac{5000m}{300m} = 16 + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

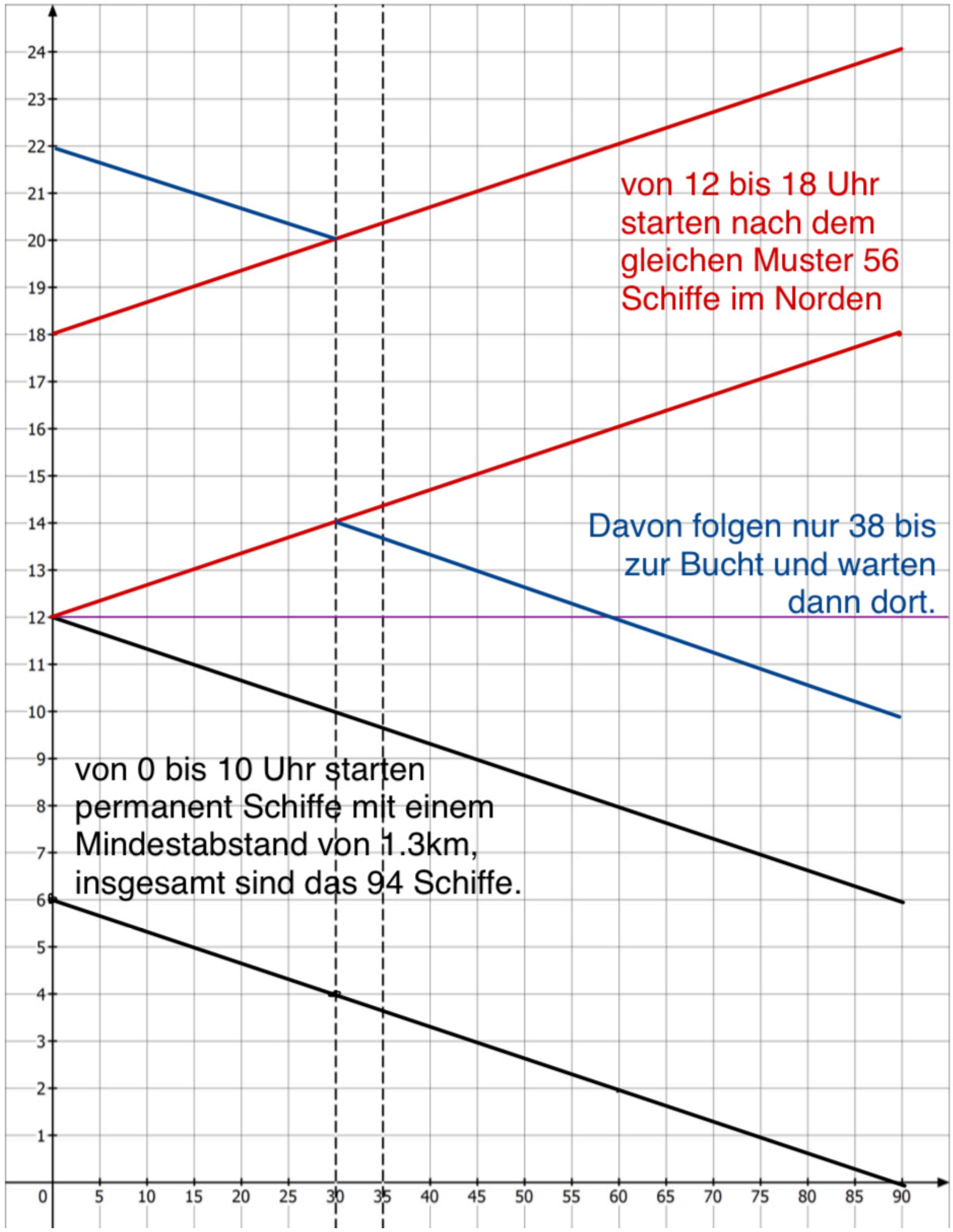
Es folgt: Es passen 16 Schiffe in die Bucht.

$$\begin{aligned}
\text{Anzahl Schiffstarts} \cdot \text{Dauer des Schiffstarts} &= \text{benötigte Länge des Startfensters} \\
&= 6,36min \cdot 16 = 101,76min
\end{aligned}$$

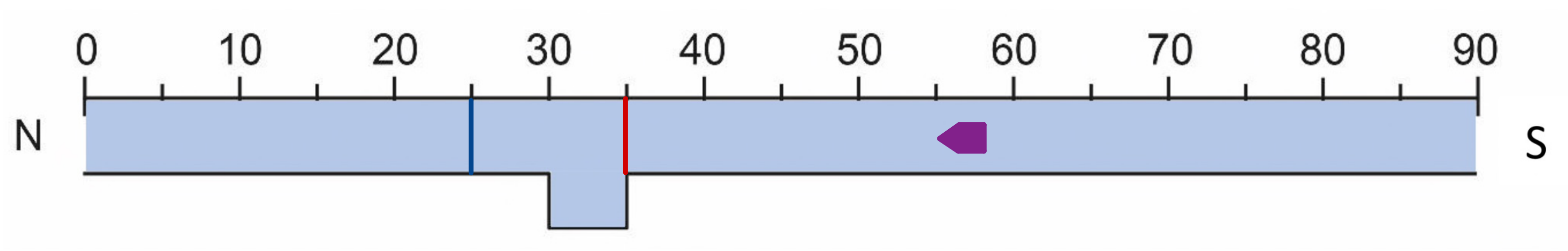
Das ist ein realistischer Fall mit der vorgegebenen Passierbucht von 30 bis 35 Kilometer.

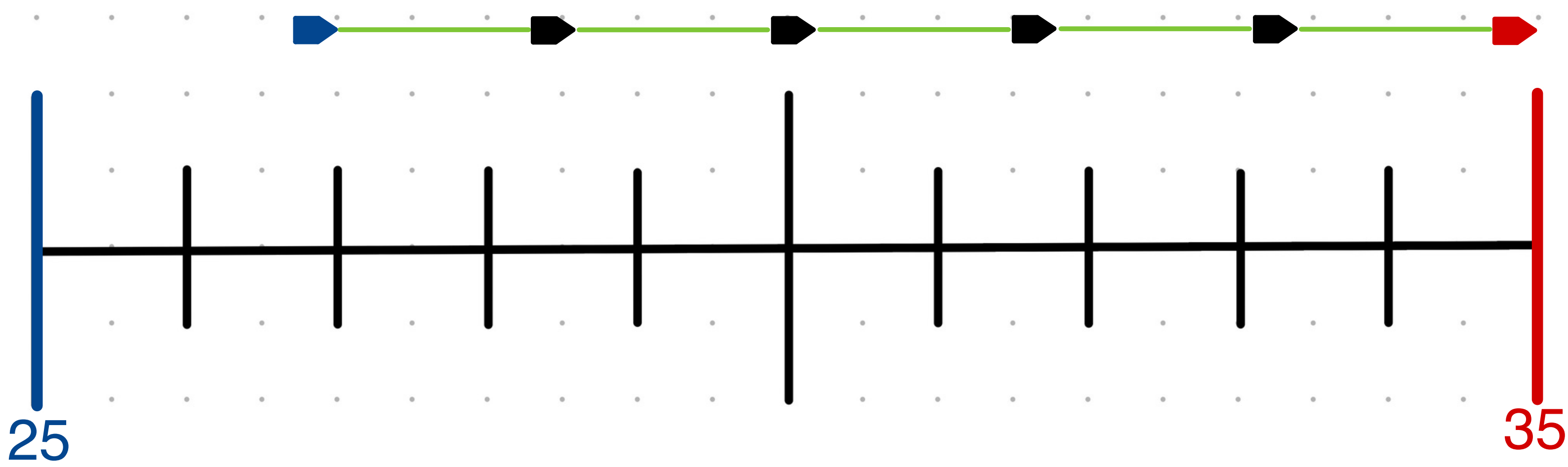
Diese Taktung könnte nochmal verbessert werden, indem der erste Vorschlag übernommen wird und die Passierbucht vergrößert wird. Dies ist der wahrscheinlich kostengünstigste Vorschlag. Die Grafik des Fahrplans lässt erkennen, dass die Anzahl an Schiffen nun noch größer wird.

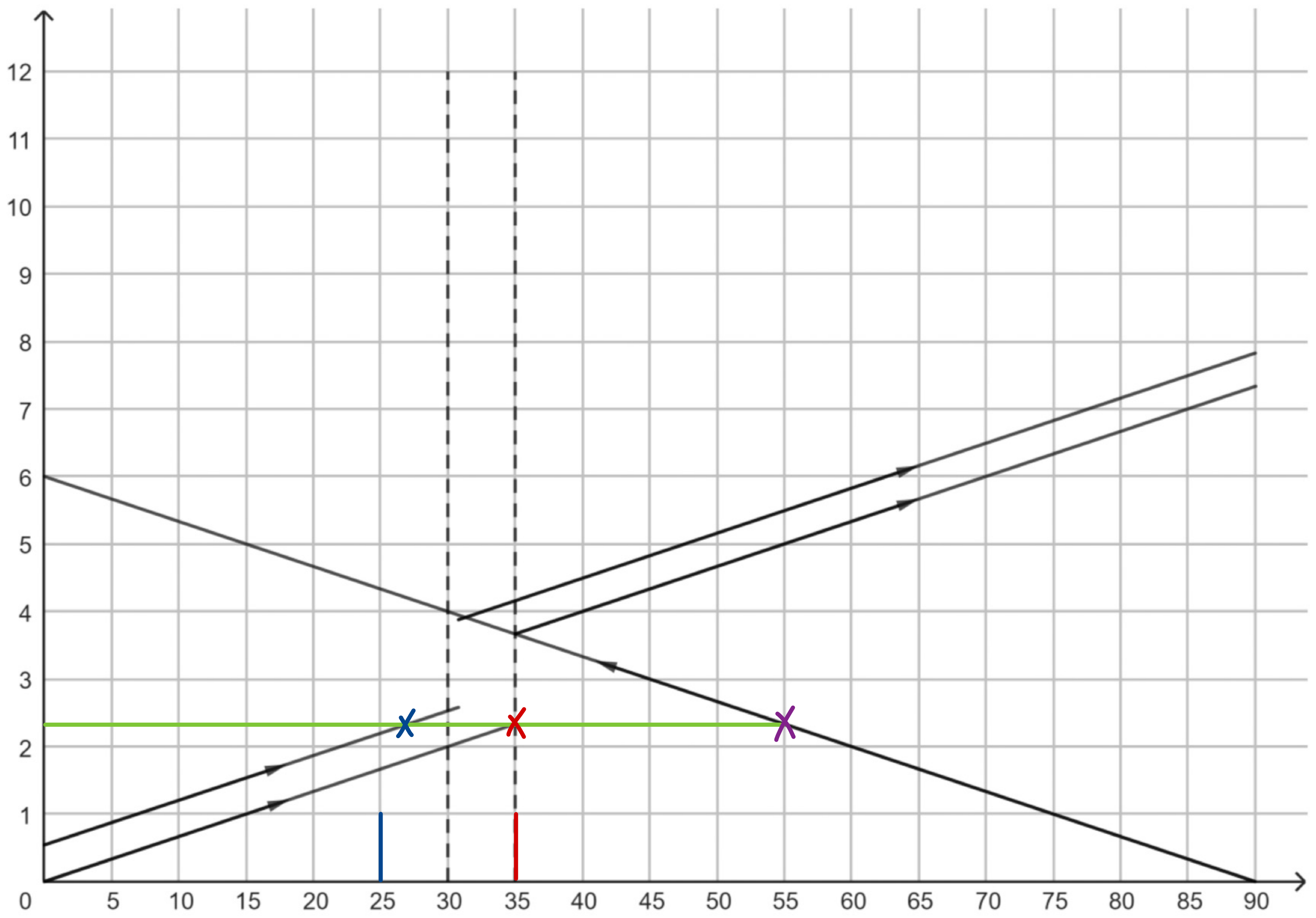
Insgesamt passieren 150 Schiffe den Kanal

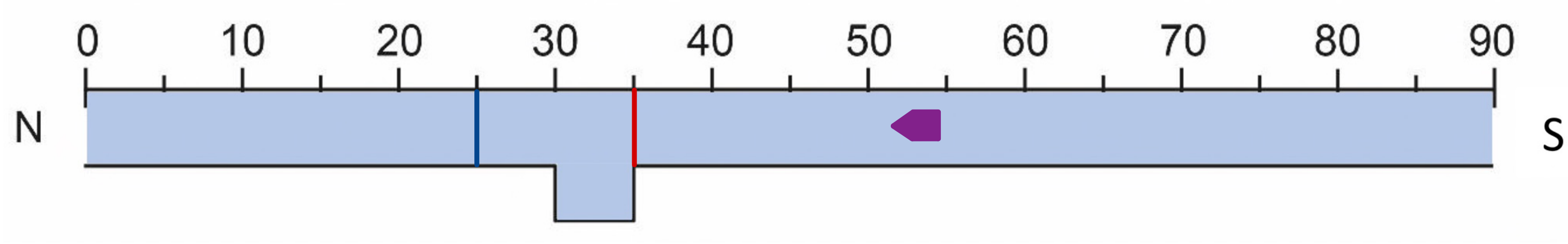


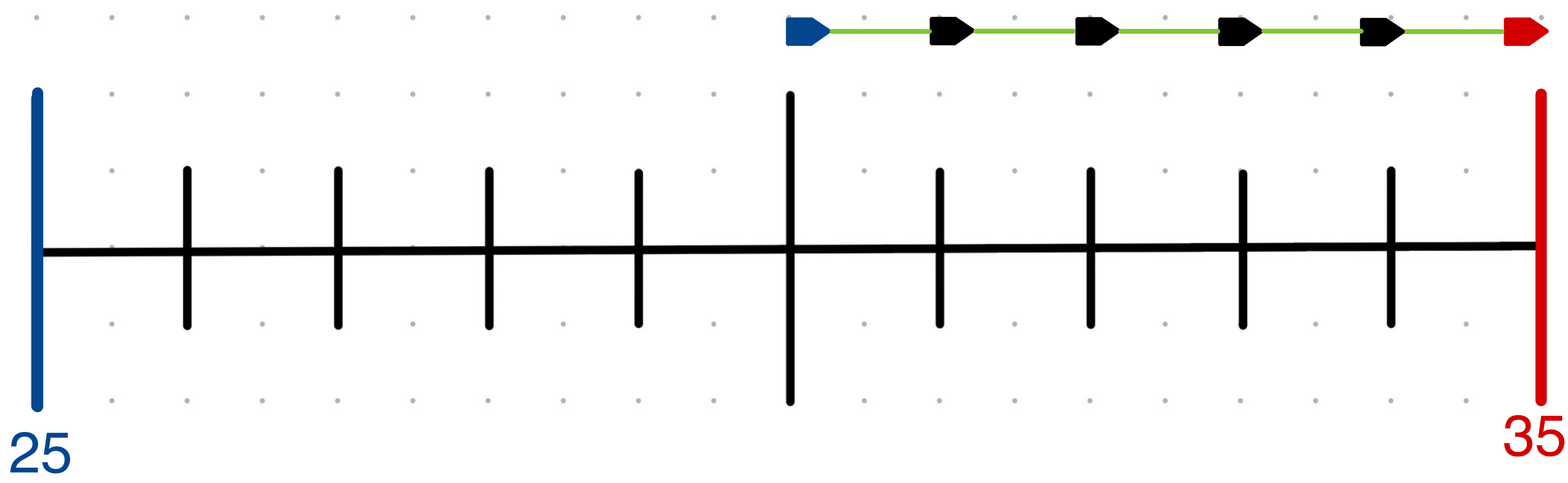
Aufgabe 8

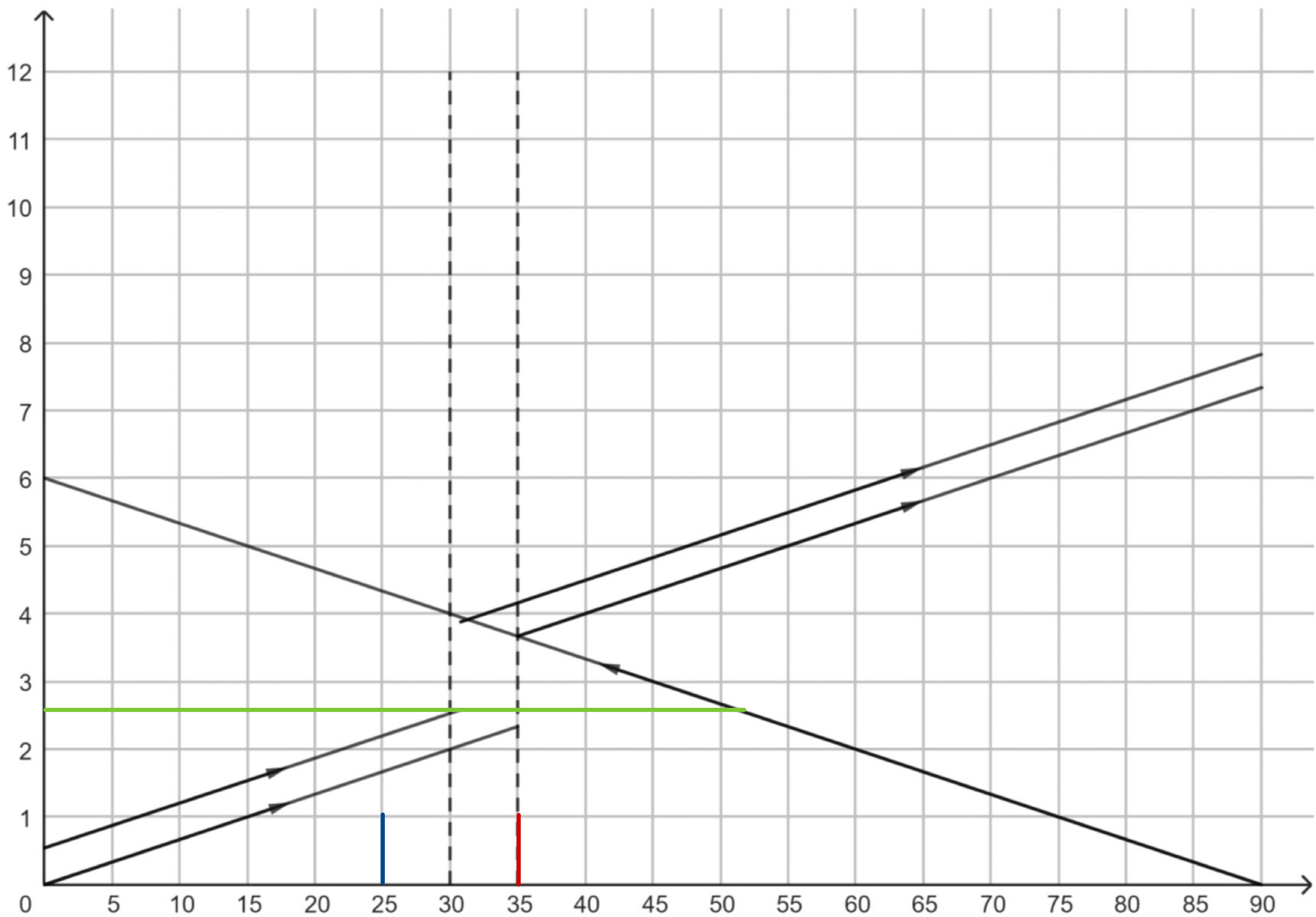

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
N
S

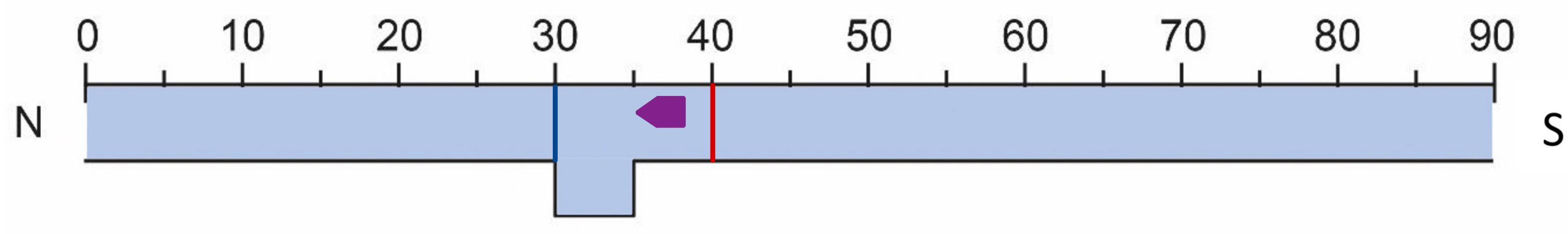

25
35

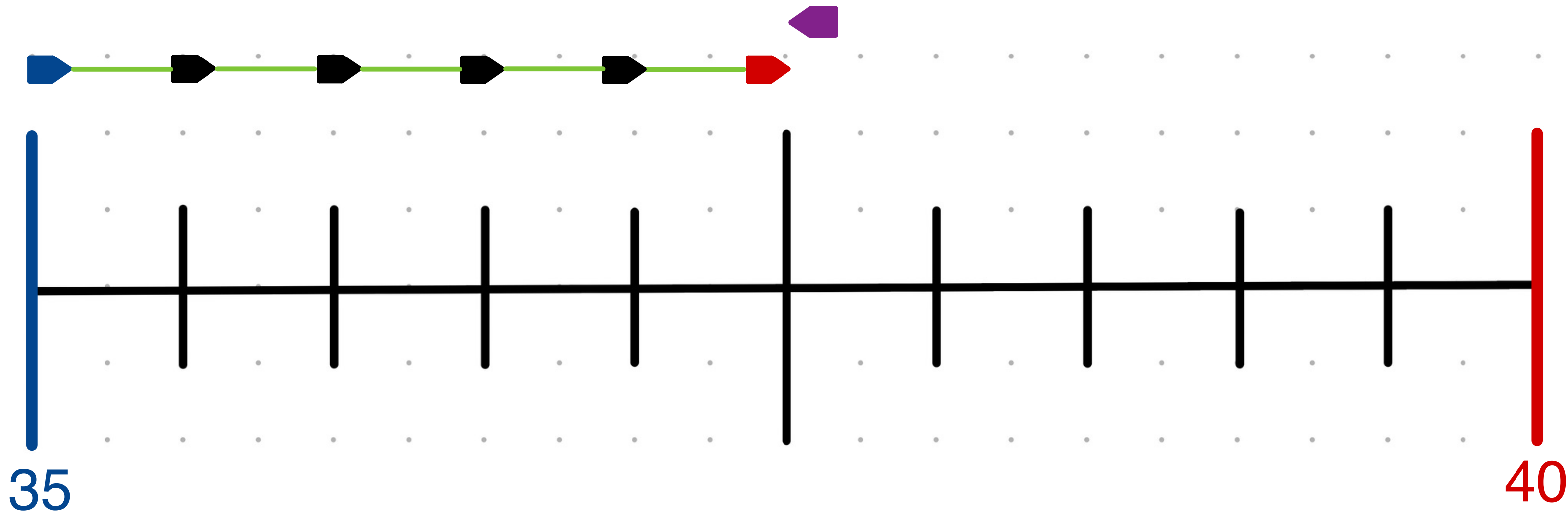

12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90

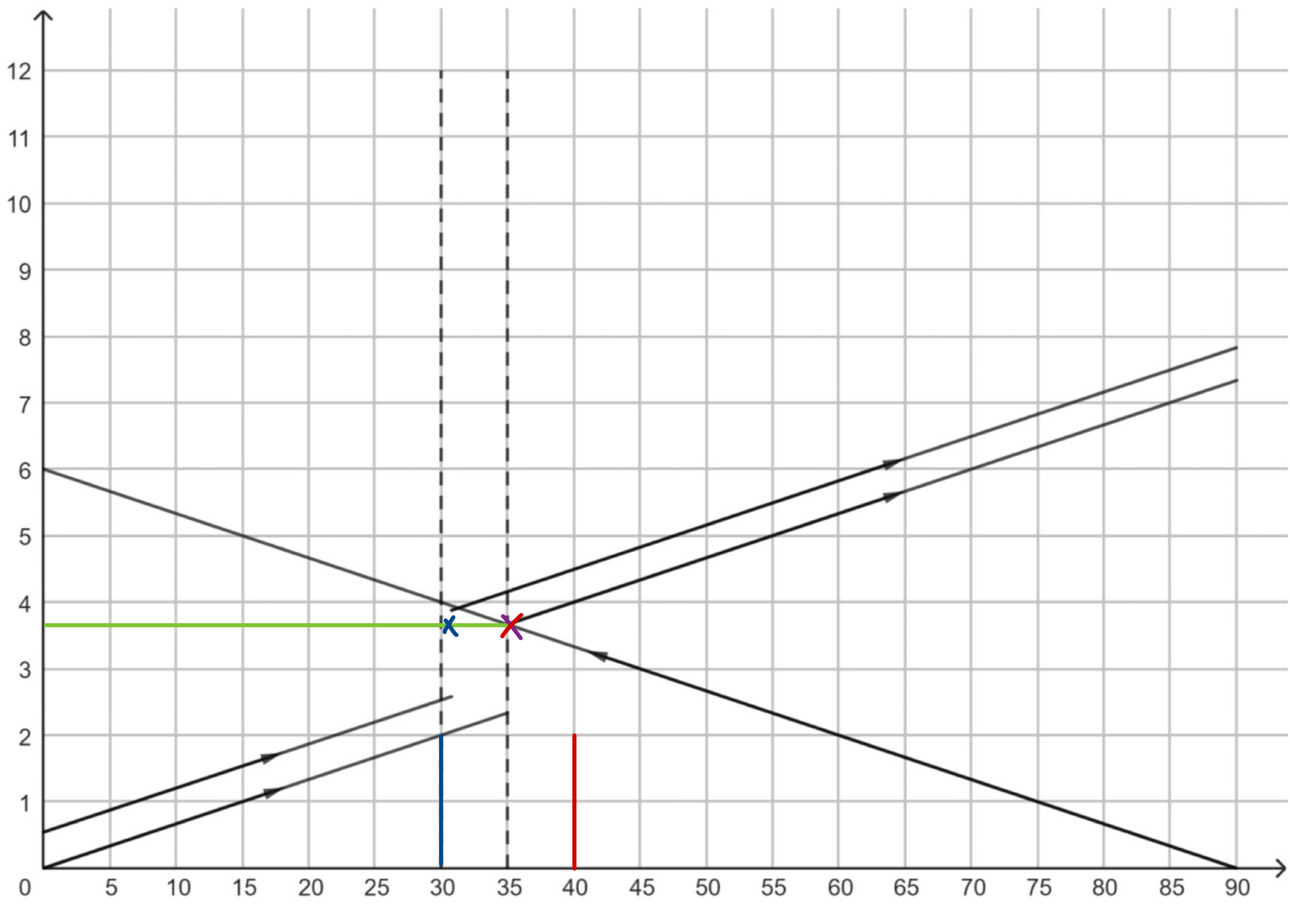

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
N
S

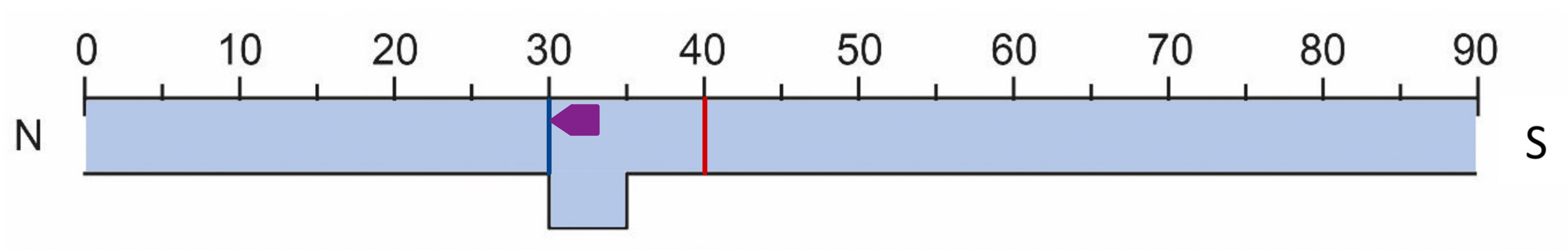

25
35

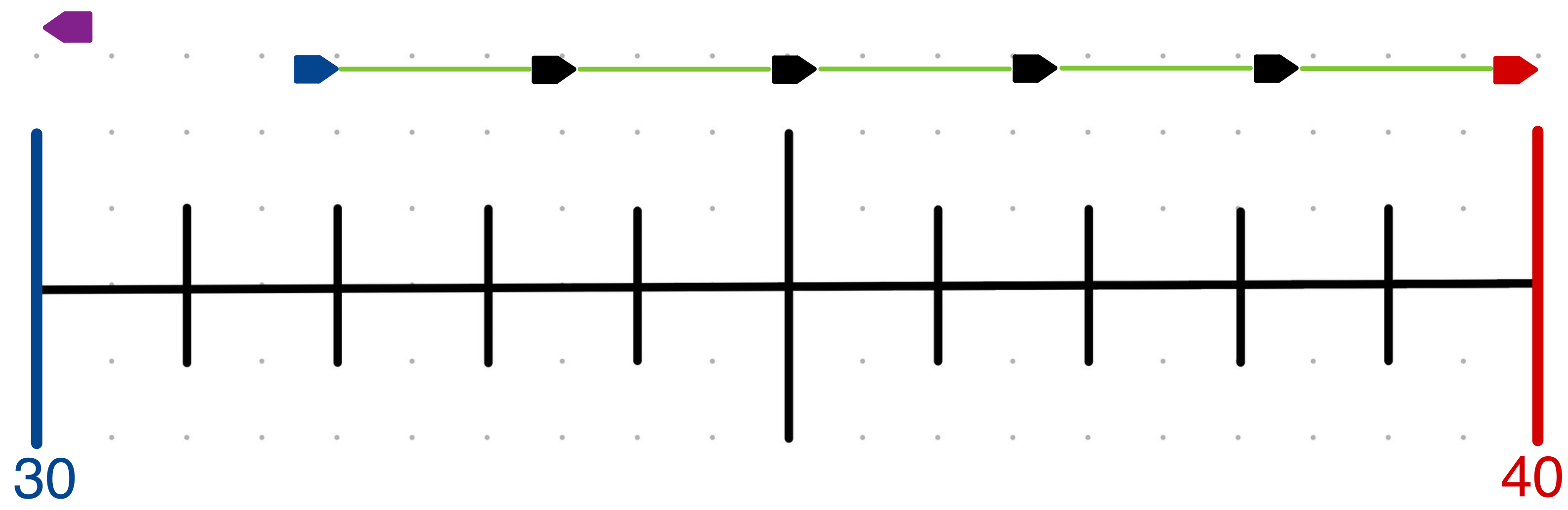

12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90

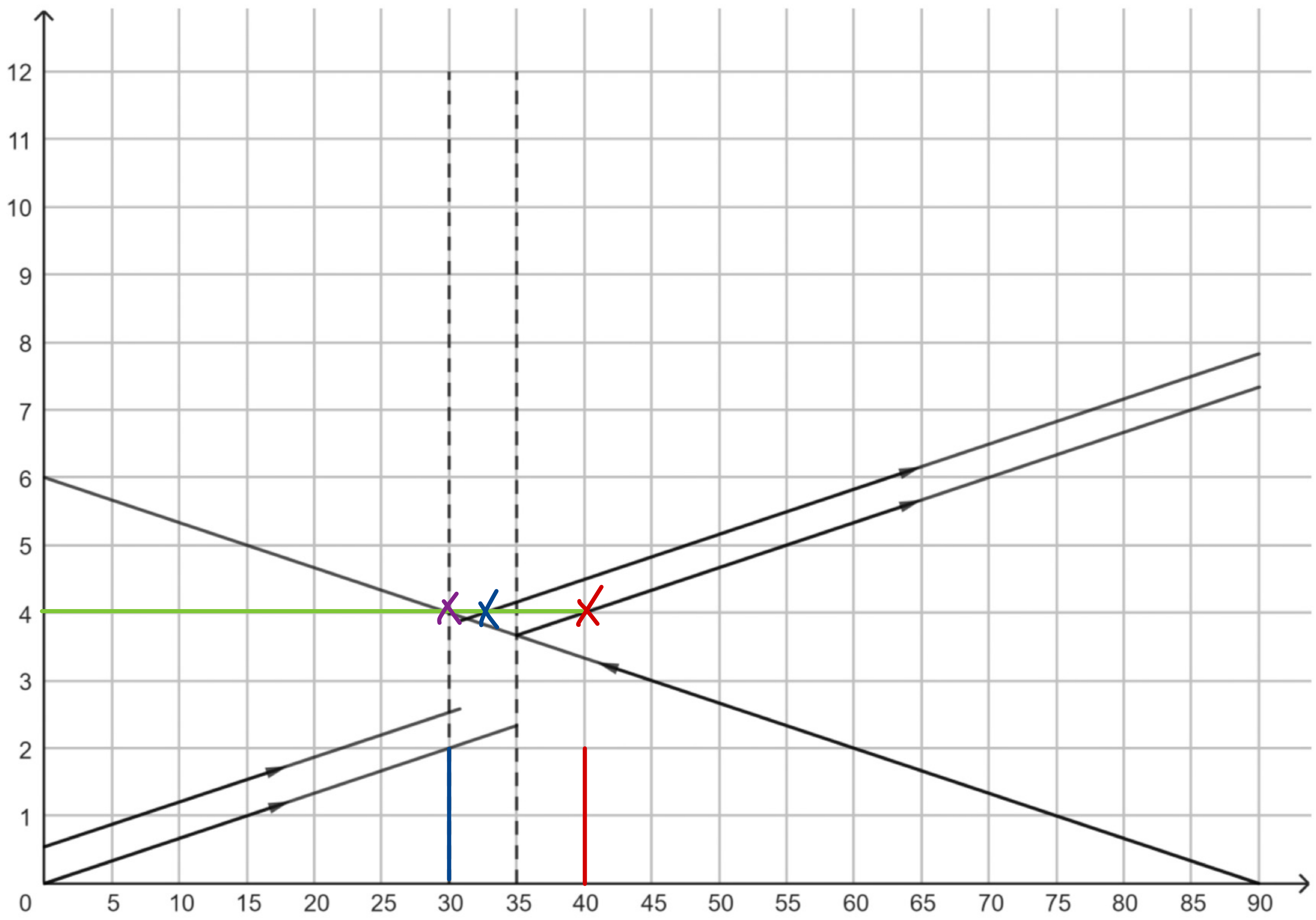

0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
N
S


35
40


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80
85
90


0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
N
S


30
40


12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90