



SCHULJAHR 2022/2023

SEMINARFACHARBEIT IM KURS SF48

Dietmar MEYER

Untersuchung fraktaler Mengen und fraktaler Kurven

Arne Koenen

20. März 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Fraktale Kurven	3
2.1	„Monsterkurven“	3
2.2	Selbstähnlichkeit und weitere Fraktale	5
3	Fraktale Mengen	8
3.1	Komplexe Zahlen und Fixpunkte	8
3.2	Die Mandelbrot-Menge	10
3.2.1	Das „Apfelmännchen“	10
3.2.2	Das periodische Verhalten	12
3.2.3	Julia-Mengen - Verwandte der Mandelbrot-Menge	13
3.3	Die Feigenbaum-Konstante	15
4	Zusammenfassung	17
5	Anhang	18
5.1	Literaturverzeichnis	18
5.2	Abbildungsverzeichnis	20

1 Einleitung

Als der deutsche Naturforscher *Georg Christoph Lichtenberg* im Jahre 1777 auf dem Harzstaub einer elektrisch geladenen Isolierplatte regelmäßige Muster erkannte, hätte niemand gedacht, dass diese Muster in der Zukunft Popularität fänden [7] - die Rede ist von sogenannten *Fraktalen*. Diese bis in das späte 20. Jahrhundert als „Monsterkurven“ bezeichneten geometrischen Gebilde waren für die meisten Mathematiker nicht von Bedeutung, sie hielten an der euklidischen Geometrie, der uns bekannte Geometrie der zweiten und dritten Dimension. Mit dem französisch-US-amerikanischen Mathematiker *Benoît Mandelbrot* wurde nun im Buch „Fractals: Form, Chance, and Dimension“ [8] diese neuartige Geometrie der unendlich oft iterierten und zuvor unbeschreibbaren Fraktale erstmals benannt - mit Erfolg: Die Folgen war ein großer Ansturm. Nicht nur von Mathematikern, auch von Laien, die allesamt von dem von den Fraktalen mitgebrachten ästhetischen Reiz beeindruckt waren. Der britische Mathematiker Michael Barnsley beschrieb es dramatisch:

„Fractal geometry will make you see everything differently. There is a danger in reading further. You risk the loss of your childhood visions of clouds, forests, galaxies, leaves, feathers, rocks, mountains, torrents of water, carpets, bricks, and much else besides. Never again will your interpretation of these things be quite the same.“ [2]

Im Rahmen dieser Facharbeit sollen ausgewählte *Fraktale Kurven* der zweiten und dritten Dimension auf ihre besonderen Eigenschaften (Selbstähnlichkeit, Oberflächen, Volumen, etc.) untersucht werden und bei *Fraktale Mengen*, besonders die *Mandelbrot-Menge*, auf ihre eigenartige Geometrie und das Verhalten von Zahlenfolgen untersucht werden.

Die Facharbeit soll zudem näherbringen, dass Fraktale und ihre interessanten Eigenschaften viele zuvor unerklärliche Prozesse und Phänomene ohne scheinbare Ordnung tatsächlich präzise beschrieben und mit verschiedenen Bereichen der Mathematik verknüpft werden können.

2 Fraktale Kurven

2.1 „Monsterkurven“

Wie groß ist die Küstenlinie von Großbritannien genau? Diese recht trivial aussehende Frage ließe sich beantworten, indem man z.B. kleine Linien oder Dreiecke ansetzt und deren Länge bzw. Umfang misst. Für die Mathematiker und Kartographen war das auch die gängigste Methode bis in das späte 20. Jahrhundert. Doch die exakte Linie ist dies noch nicht: man kann z.B. die Teilstrecken weiter verkleinern und somit mehr aneinanderlegen und schließlich messen; man erkennt, dass die Küstenlinie folglich länger wird. Doch reicht dies schon für die Bestimmung der exakten Küstenlinie?.

Um sich diesem Problem anzunähern, nehme man eine Strecke und unterteilt sie in drei gleichgroße Teilstrecken. Auf der mittleren Teilstrecke wird nun ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Diese Teilstrecke, die die Grundseite darstellt, wird entfernt. Dieser Schritt ergibt sich folgende Struktur:



Abbildung 1: Erste Iteration der Koch-Kurve

Es sind folglich vier Teilstrecken entstanden. Wie bei der Küste kann man nun an jeder der vier Teilstrecken den vorherigen Schritt wiederholen. Für die nächsten zwei sogenannten *Iterationen* ergeben sich also folgende Gebilde:

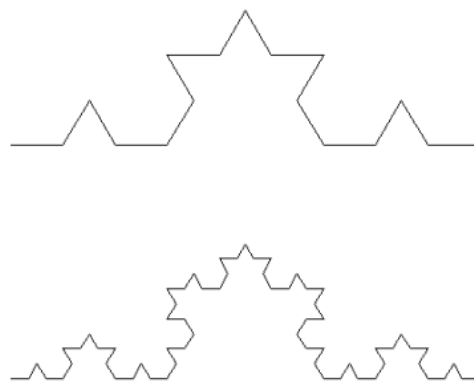


Abbildung 2: Weitere Iterationen der Koch-Kurve

Um auf die Länge zurückzukommen, nimmt man nun an, dass die Länge der Ausgangsstrecke $1LE$ ist. Die Länge der nächsten Teilstrecke folglich $\frac{1}{3}LE$. Die Kurve der nächsten Iteration ist somit $\frac{4}{3}LE$, da man die Länge einer Teilstrecke zur Länge der Strecke addieren muss. Für die vier Teilstrecken im nächsten Iterationsschritt gilt dieselbe Regel. Insgesamt wird die Strecke also wieder um $\frac{4}{3}LE$ länger. Für die Länge der sogenannten *Koch-Kurve* (benannt nach Helge von Koch) gilt also: $(\frac{4}{3})^n, n \in \mathbb{N}$. n sind hier die Iterationen. Es gilt also: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$. Die Länge L der Kurve wird also auch unendlich lang. Da sich ebenfalls an jeder Stelle der Kurve eine Vergrößerung des vorherigen Schrittes befindet, kann die Kurve an keinem Punkt differenzierbar sein, obwohl sie überall stetig ist. Solche Eigenschaften jener Kurven sorgten also für großes Entsetzen bei den Mathematikern jener Zeit.[12] Sie wurden deshalb auch oft als „Monsterkurven“ bezeichnet. Küsten besitzen auch solche fraktalen Strukturen und sind also mathematisch gesehen unendlich lang - Für die Küstenlänge kann also keine konkrete Länge ermittelt werden. Die Längen unterscheiden sich also auch in vielen Angaben und Büchern.

Eine konkrete Anwendung einer solchen fraktalen Struktur sind sogenannte *Fraktalantennen*. Sie hat eine, wie vorhin bewiesen, große Kantenlänge und feine Strukturen für eine Fläche mit einem endlichen Flächeninhalt. Diese Eigenschaften ermöglichen es größeren Frequenzbereich abdecken als die wesentlich größeren Antennen vor ihrer Entdeckung (1995 von *Carles Puente Baliarda*).[5]

Eine mögliche Fraktalantenne kann folgendermaßen aussehen:

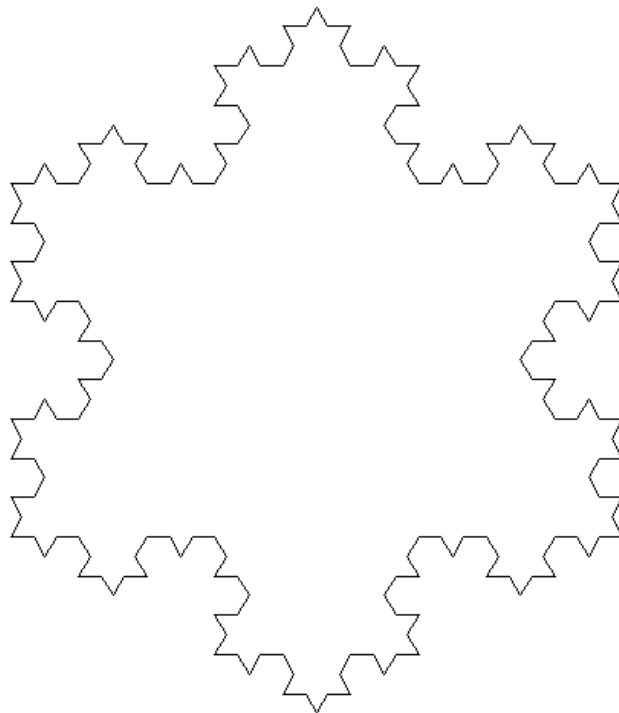


Abbildung 3: Die sogenannte *Koch-Schneeflocke*

2.2 Selbstähnlichkeit und weitere Fraktale

Die zuvor untersuchte Koch-Kurve wird in der fraktalen Geometrie als *skaleninvariant* beschrieben. *Skaleninvarianz* ist eine Eigenschaft, die zeigt, dass ein verkleinerter Teil des Objektes bei Vergrößerung genau dieses Objekt ergibt. Es ist also unabhängig von der Skala (Vergrößerung/Verkleinerung), wie die Eigenschaften des Objektes sind. Die Koch-Kurve kann also um ein Drittel verkleinert werden und es entsteht eine exakte Kopie der Kurve, da die Eigenschaften (Winkel und Seitenverhältnisse) gleich geblieben sind. Aus dieser Skaleninvarianz folgt also die sogenannte *Selbstähnlichkeit*, die eben besagt, dass eine beliebige Verkleinerung eines Objektes die Struktur des ursprünglichen Objektes behält.

Verschiedene Fraktale sind unterschiedlich selbstähnlich - es wäre also möglich, sie nach ihrer Selbstähnlichkeit zu „klassifizieren“. Benoît Mandelbrot, der auch „Vater der fraktalen Geometrie“ genannt wird, hat auf Grundlage der *Hausdorff-Dimensionen* eine erweiterte Definition der euklidischen Dimensionen für dieses Problem entwickelt: Die sogenannte *Ähnlichkeitsdimension* D : Zerlegt man ein Quadrat in z.B. 9 gleich große Teilquadrate, werden die Kanten in 3 Teilstrecken geteilt, also im Maßstab 1 : 3. Teilt man einen Würfel genauso in 27 Teilwürfel, bleiben die Kanten gedrittelt, der Teilwürfel bleibt also eine Verkleinerung im Maßstab 1 : 3. Es lässt sich also schließen, dass $3^2 = 9$ für die Verkleinerung eines Quadrates in gleich große Teilquadrate und $3^3 = 27$ für die gleichmäßige Verkleinerung eines Würfels in Teilwürfel ist.

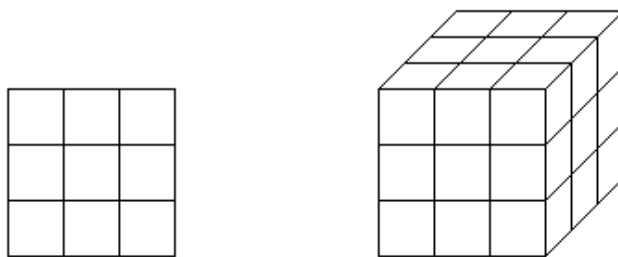


Abbildung 4: Zerlegung eines Quadrates und Würfels in gleich große Teilstücke im Maßstab 1 : 3

Eine Dimension ist nach dieser Auffassung der Exponent D , den man benötigt, um eine Maßzahl(n) der Verkleinerung in die Gesamtheit k , also alle Teile zusammen, zu erheben. Es gilt also:

$k = n^D$. Das Quadrat wird um 1 : 3 verkleinert, also ist 3 die Maßzahl n . Gesucht ist jetzt der Exponent D , der alle Teilquadrate zum Ganzen, also 9 Teilquadrate zusammenfügt. Es gilt: $9 = 3^D$. D muss hier folglich 2 sein und

entspricht der zweiten Dimension.

Für die Koch-Kurve wird also folglich auch eine Zahl D gesucht, die benötigt wird, um eine im Maßstab $1 : 3$ geteilte Strecke auf 4, also die vier neu zusammengesetzten Teilstrecken, zu erheben. Es gilt:

$$3^D = 4$$

Durch Logarithmieren und Umformen erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \log(3^D) &= \log 4 \\ D \cdot \log 3 &= \log 4 \\ &= \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619. \end{aligned}$$

Die Ähnlichkeitsdimensionen, nicht bestehend aus ganzen Zahlen, sondern aus Brüchen, sind deshalb namensgebend für die Fraktale (lat. *fractus* - gebrochen). Diese erweiterte Dimension der unendlich iterierten Gebilde, die also nicht mit den euklidischen Dimensionen beschrieben werden können, nützen beispielsweise der Medizin: Will man z.B. den Sauerstoff-Transport der Menschlichen Lunge genauer bestimmen (z.B. Sauerstoffabgabe), sollte man mit einer angemesseneren Dimension arbeiten als mit der zweiten und dritten Dimension. Die Lungenbläschen, die für die Sauerstoff-Abgabe eine zentrale Rolle spielen, scheinen außerdem auch einer fraktalen Struktur zu ähneln, nämlich dem *Menger-Schwamm*:

Ein Würfel wird in 27 Teilwürfel, also im Maßstab $1 : 3$ geteilt, die mittleren Teilwürfel, also insgesamt 7 Stück, werden entfernt. Dies geschieht genauso bei den Teilwürfeln davon. Für D gilt also, wenn die Maßzahl 3 ist und die Gesamtzahl $72 - 7 = 20$ ergibt:

$$\begin{aligned} 20 &= 3^D \\ D &= \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,727 \end{aligned}$$

Bei dem Sauerstofftransport in der Lunge sollte man beispielsweise die Sauerstoff-Abgabe pro Minute eher um das 2,73-Fache in Abhängigkeit der Körpergröße durch eben diesen fraktalen Aufbau der Lunge erwägen. [4]

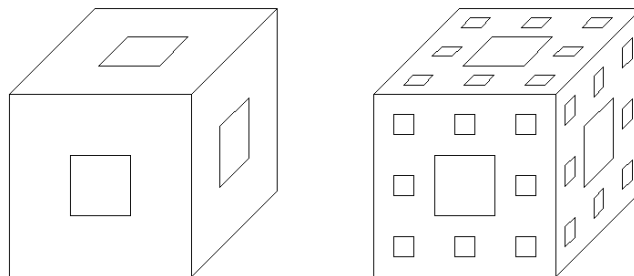


Abbildung 5: Die ersten zwei Iterationen vom Menger-Schwamm

Bei fraktalen Kurven im dreidimensionalen Raum lässt sich außerdem das Volumen ermitteln:

Der Menger-Schwamm besteht in Abhängigkeit der Iterationen aus $n \in \mathbb{N}$ aus $N_n = 20^n$ Würfeln, da pro Iterationsschritt aus einem Würfel 20 Teilwürfel entstehen. Die Länge L_n in Abhängigkeit der Iterationen lässt sich wie bei der Koch-Kurve mit dem Maßstab $1 : 3$ als $L_n = (\frac{1}{3})^n$ darstellen (davon ausgehend, dass die Ausgangslänge einer Seite $1LE$ entspricht). Das Volumen V_n besteht also aus der Menge aller Teilwürfel N_n und der zugehörigen Seitenlänge L_n , die mit 3 potenziert werden muss, da das Volumen des Teilwürfels das Produkt drei gleicher Längen (Hier L_n) ist. Es gilt also:

$V_n = L_n^3 \cdot N_n$. Bei dem tatsächlichen Volumen laufen die Iterationen gegen unendlich. Das Volumen muss also für $V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{3})^n \cdot 20^n = (\frac{20}{27})^n = 0$ sein. Der Nenner, der immer größer als der Zähler ist, wird beim Konvergieren gegen 0 unendlich groß. Das Volumen wird folglich auch 0.

Ebenfalls kann der Flächeninhalt bestimmt werden:

Bei der ersten Iteration liegen 20 Teilwürfel mit jeweils 6 Flächen vor. Die Anzahl aller Teilflächen wäre also $20 \cdot 6 = 120$. Jedoch teilen sich nun die 12 Kantenwürfel jeweils 2 Flächen, und die Eckwürfel jeweils 3 Flächen. Diese müssen davon schließlich abgezogen werden, somit bleiben $20 \cdot 6 - 12 \cdot 2 - 8 \cdot 3 = 6 \cdot 12 - 48$ Teilflächen übrig. Der Flächeninhalt F_n nach der ersten Iteration ist also: $F_1 = (20 \cdot 6 - 48) \cdot \frac{1}{9} FE$. Für den Flächeninhalt F_2 erhöht sich die Anzahl der Teilwürfel auf 20^2 und die Anzahl der Teilflächen auf $20^2 \cdot 6$. Folglich müssen auch 20-mal mehr Teilflächen abgezogen werden. Also $20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 48$. Für jede dieser Teilflächen gibt es auf einer Seite $8 \cdot 48$ gemeinsame Teilflächen der Länge $\frac{1}{9}$. Diese müssen ebenfalls abgezogen werden. Der Flächeninhalt F_n nach der zweiten Iteration ist also: $F_2 = (20^2 \cdot 6 - 20 \cdot 48 - 8 \cdot 48) \cdot \frac{1}{9^2} FE$.

Für jede Iteration ergibt der Flächeninhalt:

$$\begin{aligned} F_n &= [20^n \cdot 6 - 48 \cdot (20^{n-1} + 20^{n-2} \cdot 8 + \dots + 8^{n-1})] \cdot \frac{1}{9^n} \\ &= 20^{n-1} \cdot [120 - 48(1 + \frac{2}{5} + \dots + (\frac{2}{5})^{n-1})] \cdot \frac{1}{9^n} \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1} \cdot [120 - 48 \cdot \frac{5}{3}(1 - (\frac{2}{5})^n)] \\ &= \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1} \cdot [40 + 80(\frac{2}{5})^n]. \end{aligned}$$

Bei unendlichen Iterationen gilt: $F_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} \cdot (\frac{20}{9})^{n-1} \cdot [40 + 80(\frac{2}{5})^n] = \infty$. [13]
Es lässt sich also festhalten, dass in der fraktalen Geometrie bestimmte dreidimensionale Kurven zwar ein unendlich kleines Volumen haben, jedoch gleichzeitig einen unendlich großen Oberflächeninhalt.

Neben der Koch-Kurve und dem Menger-Schwamm gibt es noch unzählige weitere Fraktale; diese beiden Fraktale dienen hier als repräsentatives Beispiel für die Vielfalt der Fraktale, ihre faszinierenden Eigenschaften und ihre durchaus nützlichen Anwendungen, beispielsweise in der Technik und Medizin.

3 Fraktale Mengen

3.1 Komplexe Zahlen und Fixpunkte

Um fraktale Mengen komplett zu untersuchen und darzustellen, werden *komplexe Zahlen* benötigt: Komplexe Zahlen sind eine Erweiterung zu den bekannten reellen Zahlen. Die komplexen Zahlen fanden ihren Ursprung in dem Problem, dass es mit den reellen Zahlen keine Zahl gibt, die quadriert eine negative reelle Zahl ergibt. Anders ausgedrückt wird eine Zahl i gesucht, für die gilt: $i^2 = -1 \Rightarrow \pm\sqrt{-1} = i$

So eine Zahl i wird folglich als *imaginäre Zahl* bezeichnet. Eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ besteht also aus einem *Realteil* $a \in \mathbb{R}$ und einem *Imaginärteil* $b \cdot i, b \in \mathbb{R}$; insgesamt gilt also: $c = a + b \cdot i$. Die Zahl i kann man als Einheit für imaginäre Zahlen verstehen. Komplexe Zahlen können auch auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden, indem der Zahlenstrahl der imaginären Zahlen senkrecht zum Zahlenstrahl der reellen Zahlen im Ursprung verläuft. Komplexe Zahlen können dann analog zu einem Koordinatensystem als Punkt $C(a|b)$ angegeben werden. So ein „Koordinatensystem“ wird dann als *komplexe Zahlenebene* bezeichnet. Für die Untersuchung fraktaler Mengen dieser Facharbeit spielt nun als Rechenoperation die Quadrierung eine wichtige Rolle. Wird die komplexe Zahl $c = a + b \cdot i$ quadriert, können die binomischen Formeln angewendet werden; zusätzlich muss beachtet werden, dass für die Quadrierung einer imaginären Zahl $i^2 = -1$ gilt:

$$c^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i - b^2$$

Beispielsweise würde die Quadrierung der komplexen Zahl $3 + 2 \cdot i$ wie folgt aussehen:

$$(3 + 2 \cdot i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot i + 2^2 \cdot (-1) = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i.$$

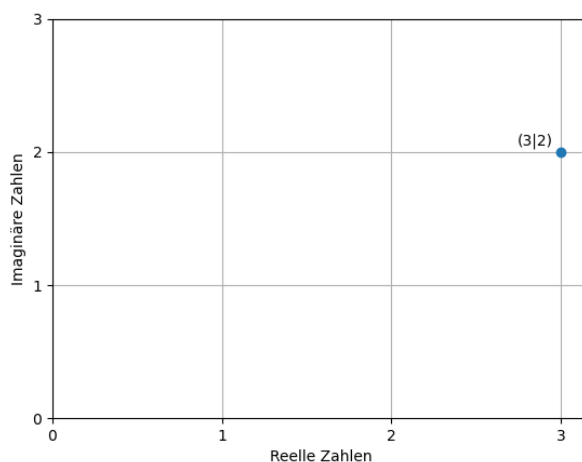


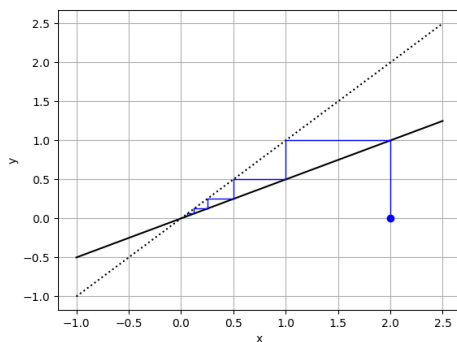
Abbildung 6: Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt auf der komplexen Zahlenebene

Neben komplexen Zahlen als Grundlage für fraktale Mengen spielen auch sogenannte *Fixpunkte* eine wichtige Rolle.

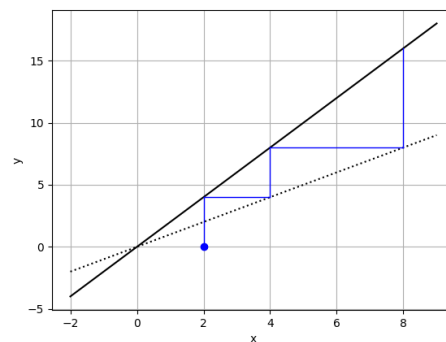
Man zeichnet in ein Koordinatensystem die Winkelhalbierende bzw. die Diagonale der Koordinatenachsen, sie entspricht der Funktion $f(x) = x$. Nun wählt man eine beliebige Funktion, hier nur als „Kurve“ bezeichnet. Man wählt als Nächstes eine beliebige Stelle, von der man startet. In diesem Beispiel wurde $x = 2$ gewählt. Nun zeichnet man einen Pfad, für den zwei Regeln gelten:

- Der Pfad bewegt sich auf- und abwärts zur Kurve hin
- Der Pfad bewegt sich nach rechts oder links zur Diagonalen hin

Für den ersten Schritt dieser Verkettung zieht man von der ausgewählten Stelle aus eine Linie senkrecht zur Kurve. Wird die Kurve berührt, wird folglich eine waagerechte Linie zur Diagonalen gezogen, bis sie wieder berührt wird. Dieser Punkt dient als Startpunkt für die iterative Wiederholung dieser beiden Schritte. Die graphische Darstellung des Pfades zweier linearer Funktionen zeigt den folgenden Verlauf:



(a) Verkettung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x$



(b) Verkettung der Funktion $f(x) = 2x$

Abbildung 7: Grafische Iterationen

Zunächst stellt man fest, dass der Punkt $(0|0)$ ein sogenannter *Fixpunkt* ist. Wenn man an der Stelle $x = 0$ eine Linie zieht, bewegt sich dieser Pfad nicht mehr von dem Punkt weg, er ist fixiert. In Abb.7 (a) erkennt man, dass sich der Pfad in die Richtung des Fixpunktes bewegt. So ein Fixpunkt, gegen den diese Iteration konvergiert, wird als *Attraktor* bezeichnet. In Abb.7 (b) erkennt man, dass sich der Pfad vom Fixpunkt wegbewegt, er divergiert gegen unendlich. So ein Fixpunkt wird als *Repeller* bezeichnet.[11]

Die Beobachtungen von bestimmten Iterationen, die hier grafisch dargestellt wurden, sind essenziell für die weitere Untersuchung von fraktalen Mengen.

3.2 Die Mandelbrot-Menge

3.2.1 Das „Apfelmännchen“

Zu den berühmtesten Entdeckungen von Benoît Mandelbrot gehörte die sogenannte *Mandelbrot-Menge*. Sie lässt sich folgendermaßen beschreiben:

Bleibt für eine komplexe Zahl c mit der Iterationsvorschrift $z_{n+1} = z_n^2 + c$ für $z_0 = 0$ die Folge z_n beschränkt, also sie divergiert bei größer werdendem n nicht gegen unendlich, gehört diese Zahl zur Mandelbrot-Menge (oder auch als $\mathbb{M}$ bezeichnet). Setzt man nun die Werte für $c = 1$ und $c = -1$ ein, ergeben sich für 5 Iterationen folgende Werte:

Iterationen für $c = 1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ z_2 &= 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \\ z_3 &= 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \\ z_4 &= 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26 \\ z_5 &= 26^2 + 1 = 676 + 1 = 677 \end{aligned}$$

Iterationen für $c = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \\ z_2 &= (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ z_3 &= 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \\ z_4 &= (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ z_5 &= 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Man erkennt, dass z_n zu $c = 1$ bei größer werdendem n gegen unendlich divergiert; $c = 1$ gehört also nicht zu $\mathbb{M}$. z_n zu $c = -1$ jedoch konvergiert gegen die Zahlen 0 und -1 , man spricht von einem *Zweier-Grenzzyklus* oder einem *alternierenden Grenzzyklus*, da sich z_n nur zwischen zwei Grenzwerten, hier sogar zwischen Fixpunkten, hin- und herbewegt. z_n bei $c = -1$ ist folglich auch beschränkt und gehört zu $\mathbb{M}$. [4]

Färbt man alle Punkte auf der komplexen Zahlenebene, die zu $\mathbb{M}$ gehören, schwarz, ergibt sich folgende fraktale Struktur:

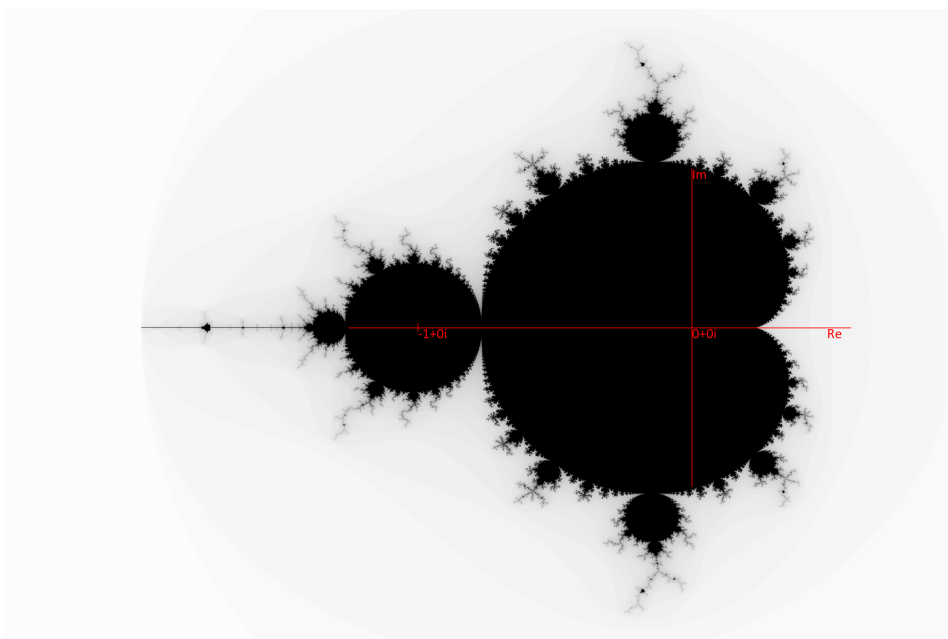


Abbildung 8: Graphische Darstellung der Mandelbrot-Menge

An der Grafik kann man auch erkennen, dass die Mandelbrot-Menge ein Fraktal ist. Beispielsweise bei ungefähr $c = -1,5 + 0i$ erkennt man, dass im großen Gebilde, das als auch als „Apfelmännchen“ bezeichnet wird, eine verkleinerte Form von diesem zu finden ist. Es liegt also eine Selbstähnlichkeit vor, die dementsprechend auch bei der verkleinerten Form vorkommt, genau wie bei den fraktalen Kurven:

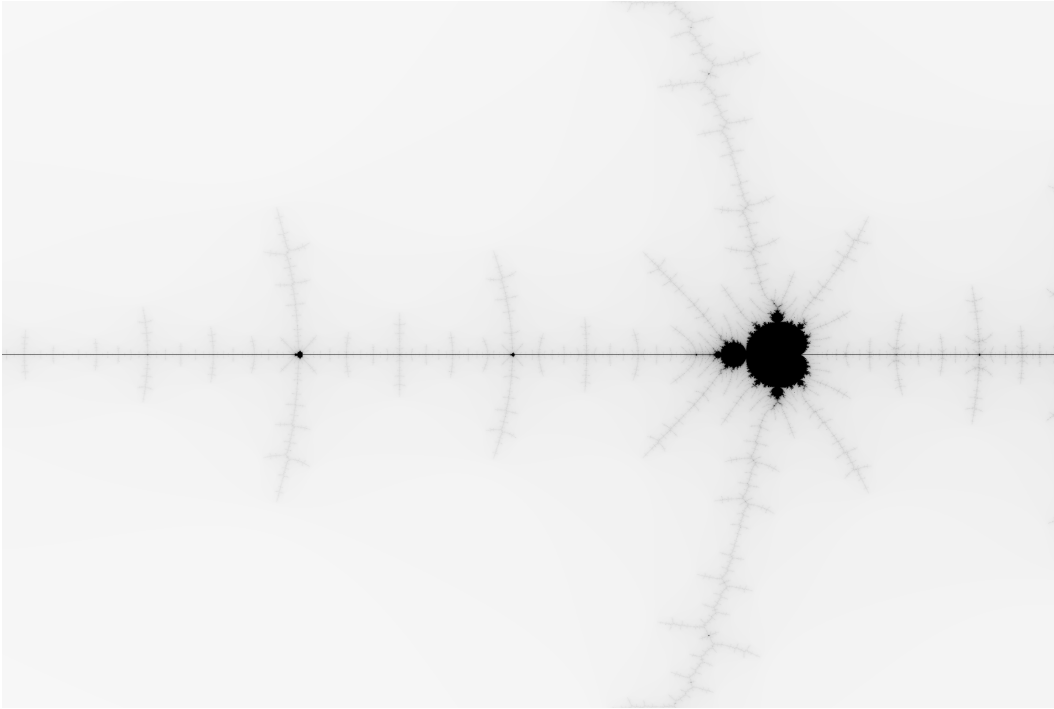


Abbildung 9: Vergrößerung der Mandelbrot-Menge zu $c = -1,5$

Bei Veränderung des Parameters c nimmt die Darstellung der Mandelbrot-Menge unterschiedliche Formen an. Dabei unterteilt man folgende Elemente:[3]

- Die *Kardioide*: der größte „Teil“ des Apfelmännchens, der sich zwischen $c = -0,75$ und $c = 0,25$ befindet.
- Um die Kardioide herum befinden sich sogenannte *Knospen*. Sie lassen sich mit *Periodizitäten*, also der Anzahl der Grenzzyklen, gegen die c konvergiert, beschreiben.
- Am Ende der Knospen befinden sich Verzweigungen, die auch als *Antennen* bezeichnet werden. Sie hängen mit der Periodizität der Knospe zusammen, an der sie sich befinden.
- Entfernt vom großen Körper der Mandelbrot-Menge befinden sich kleinere Gebilde von diesen. Diese werden als *Satelliten* oder *Mandelbrot-Mengen höherer Ordnung* bezeichnet. Sie sind dennoch mit den Antennen des Apfelmännchens verbunden. Auf dem reellen Zahlenstrahl lässt sich ein relativ großer Satellit finden (vgl. Abbildung 9).

3.2.2 Das periodische Verhalten

Wie schon in Kapitel 3.2.1 erklärt, haben die Knospen, die um die Kardioide verteilt sind, bestimmte Periodizitäten: Alle Punkte in der Kardioide nähern sich genau einem Attraktor an; sie hat daher auch eine Periodizität von 1. Die nächstgrößere Knospe hat die Periodizität von 2 (ein Beispiel ist die schon in 3.2.1 aufgeführte Iteration von $c = -1$). Bei der nächstgrößeren Knospe (ausgehend von der Spiegelsymmetrie der Mandelbrot-Menge auf dem reellen Zahlenstrahl) enthält man schon einen Dreier-Grenzyklus; die darauffolgende hat eine Periodizität von 5 und befindet sich zwischen den beiden vorherigen. Die Periodizität einer solchen Knospe ist also immer die Summe der vorherigen beiden größeren. So eine Folge ist schon als die *Fibonacci-Folge* bekannt: Läuft man die Kardioide wie ein Kreis (mit Berücksichtigung der Verschränkung) gegen den Uhrzeigersinn ab, dann liegt auf der Hälfte der Kardioide die größte Knospe mit der Periodizität von 2. Läuft man nun zur nächstgrößten Knospe mit der Periodizität von 3, wird ein Drittel benötigt. Die nächstgrößte Knospe liegt mit einer Periodizität von 5 dazwischen. Genauer liegt er bei $\frac{2}{5}$ des Kreises, gleich weit von beiden Knospen entfernt (leider kann hierfür kein Beweis dazu geführt werden aufgrund der Kürze der Facharbeit). Hier gilt also $\frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, $\frac{2}{5} = \frac{1+1}{2+3}$. Man spricht hier von der sogenannten *Mediante*. Die Position auf der Kardioide und die Periodizität jeder beliebigen Knospe ist die Mediante der Positionen der vorherigen beiden Knospen. Für die nächste Knospe erhält man $\frac{1}{3} \oplus \frac{2}{5} = \frac{1+2}{3+5} = \frac{3}{8}$. [1] Damit zusammenhängend sind auch die Antennen, die aus der Knospe hervorgehen. Die Periodizität der Knospe bzw. der Knospenwert entspricht nämlich der Anzahl der Antennen. (Hierzu wird auch aufgrund der Kürze ein Beweis ausgelassen). [6]

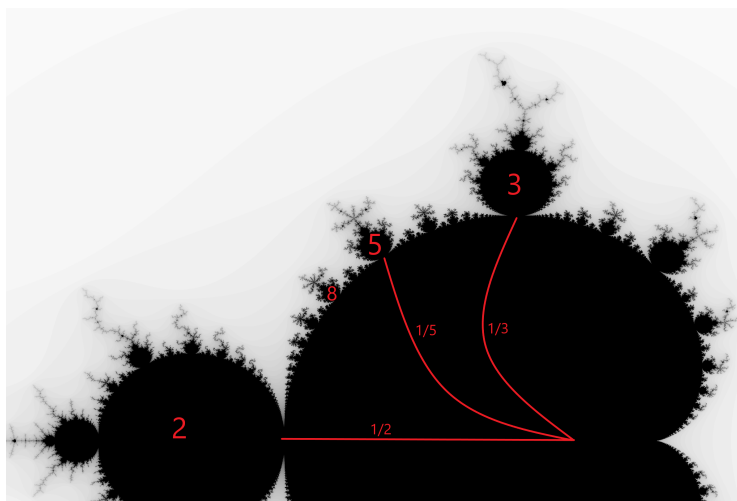


Abbildung 10: Knospenwerte und Ermittlung der Positionen der Knospen auf der Kardioide

3.2.3 Julia-Mengen - Verwandte der Mandelbrot-Menge

Die Entwicklung der Mandelbrot-Menge von Benoît Mandelbrot basiert auf den Erkenntnissen von Gaston Julia und Pierre Fatou im Jahre 1918.

Man nehme die Iterationsvorschrift ähnlich der Mandelbrot-Menge $z_{n+1} = z_n^2 + c$; jedoch bleibt c ein Parameter, das keinem Punkt auf der komplexen Zahlenebene entspricht. Dafür entspricht der Startwert z_0 jedoch einem Punkt auf der komplexen Zahlenebene. Bleibt diese Folge für z_0 beschränkt, gehört diese Zahl zur sogenannten *Julia-Menge* (oder auch J_c) für ein bestimmtes c , das im Vorhinein angegeben wird. Beobachtet man also, ob beispielsweise die Zahlen $z_0 = 1$ und $z_0 = i$ zur Julia-Menge J_{-1} gehören, erhält man folgende Werte:

Iterationen für $z_0 = 1$:				Iterationen für $z_0 = i$:			
z_1	$=$	$1^2 + (-1)$	$=$	0	z_1	$=$	$i^2 - 1 = -2$
z_2	$=$	$0^2 + (-1)$	$=$	-1	z_2	$=$	$(-2)^2 - 1 = 3$
z_3	$=$	$(-1)^2 + (-1)$	$=$	0	z_3	$=$	$3^2 - 1 = 8$
z_4	$=$	$0^2 + (-1)$	$=$	-1	z_4	$=$	$8^2 - 1 = 63$
z_5	$=$	$(-1)^2 + (-1)$	$=$	0	z_5	$=$	$63^2 - 1 = 3968$

Für diese Menge gibt es dementsprechend auch eine grafische Darstellung:

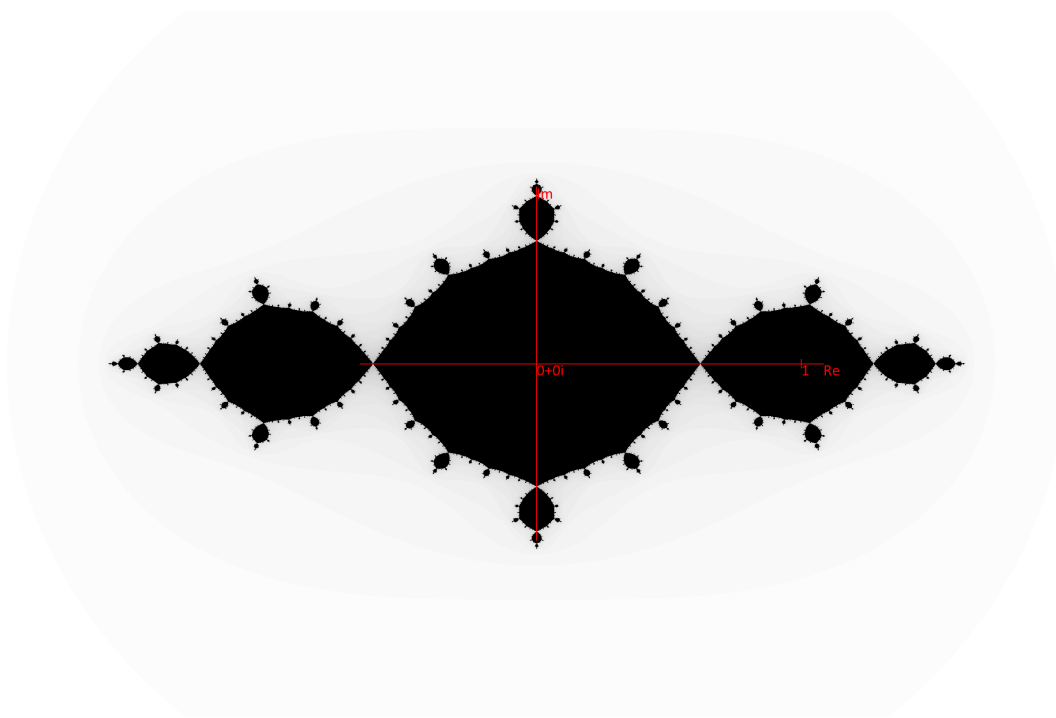


Abbildung 11: Julia-Menge für $c = -1$

Je nachdem, wie das Parameter c gewählt ist, verändert sich also das gesamte Gebilde. Eine weitere ist die Julia-Menge für $-0,74543 + 0,11301i$. Vergleicht man nun die gewählte Julia-Menge mit einem Ausschnitt der Mandelbrot-Menge um dieses c herum, kann man folgende Ähnlichkeit festhalten:

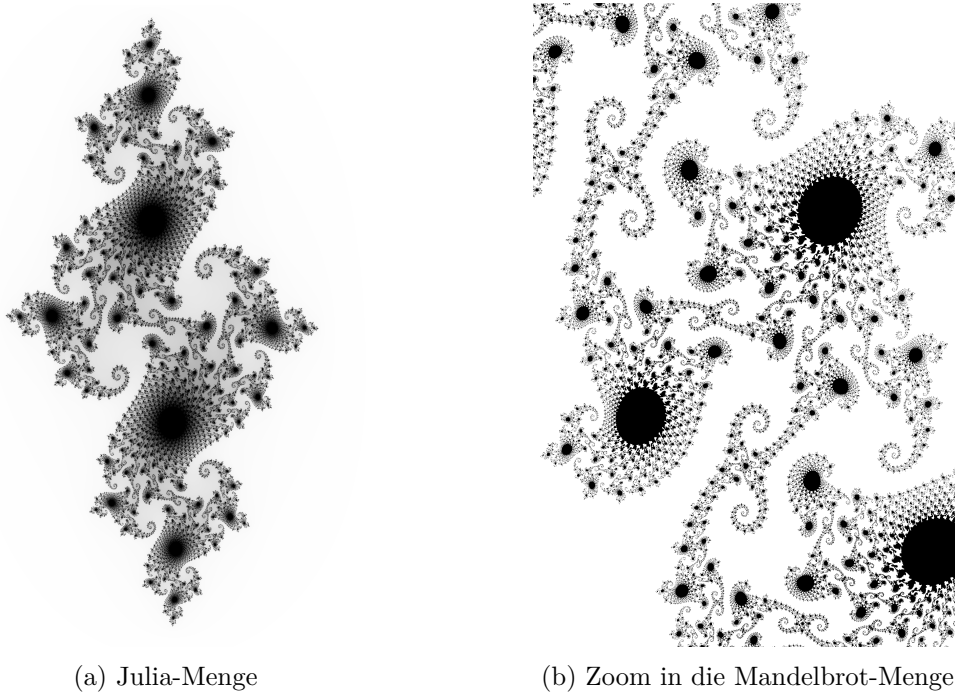


Abbildung 12: Vergleich Mandelbrot-Menge und Julia-Menge mit $c = -0,74543 + 0,11301i$ (beide um 90° gedreht)

Es lässt sich also die Struktur für die Julia-Menge J_c in der Mandelbrot-Menge bei c wiederfinden.

Bei dem Einsetzen unterschiedlicher Werte für z_0 , die zur Julia-Menge J_c gehören, stellt man fest, dass die Folge nach einer bestimmten Anzahl von Iterationen auf denselben Grenzzyklus zuläuft (ab ca. $z_0 = -1,45$ scheint es keinen ersichtlichen Grenzzyklus mehr zu geben, dennoch bleiben sie beschränkt). Die Grenzzyklen J_c bei jedem z_0 entsprechen dem Grenzzyklus, der für dieses Parameter in der Mandelbrot-Menge erreicht wird:

Die letzten sechs von 100 Iterationen für:

$J_{-1,3}$	$\mathbb{M}$ bei $c = -1,3$
0.019430292332817123	0.019430292332817123
-1.2996224637398612	-1.2996224637398612
0.3890185482572668	0.3890185482572668
-1.1486645691118087	-1.1486645691118087
0.019430292332817123	0.019430292332817123
-1.2996224637398612	-1.2996224637398612

3.3 Die Feigenbaum-Konstante

Aus den Erkenntnissen der vorherigen Kapitel gibt es vier Möglichkeiten, wie sich eine Zahl mit dem Bildungsgesetz der Mandelbrot-Menge entwickeln kann:

- Sie konvergiert gegen einen Fixpunkt.
- Sie konvergiert gegen mehrere Attraktoren, beziehungsweise gegen einen Grenzyklus.
- Sie bleibt zwar beschränkt, jedoch scheint sich die Iteration chaotisch ohne Grenzyklus zu entwickeln.
- Sie divergiert gegen Unendlich.

Auf Grundlage dieser Beobachtungen betrachtet man nun ein ganz neues Bildungsgesetz, nämlich die sogenannte *logistische Gleichung*. Sie dient als einfaches Modell, um Populationsentwicklung oder die Verbreitung von Krankheiten zu erklären. Sie setzt sich aus einem „Zuwachs“ und einem „Abgang“, die von einer Konstante k , der Fruchtbarkeit, dem Ansteckungsfaktor, etc. abhängt. Folglich gilt für die nächste Partie, Generation, etc. p_{n+1} , die vom Zuwachs p_n , dem Abgang $1 - p_n$ und der Fruchtbarkeit, etc. k abhängt, folgende Iterationsvorschrift:

$p_{n+1} = p_n + k \cdot p_n \cdot (1 - p_n)$. Für eine realitätsnahe Modellierung wird für p_0 hier 0,3 verwendet, also 30%. Bei dem Einsetzen verschiedener Werte für k erkennt man:

Die ersten sechs Iterationen für:

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
0.51	0.72	0.9299999999999999
0.7599	1.1232	1.1253000000000002
0.94235199	0.84644352	0.7022997299999995
0.9966767069430399	1.1063972949000191	1.3295241877257813
0.9999889557232575	0.8709619363758976	0.015193053659429578
0.9999999998780239	1.0957364198963866	0.06007972799922339

Man erkennt, dass die Iteration für $k = 1$ gegen 1 konvergiert, die Iteration für $k = 2$ gegen zwei Grenzyklen (bei mehr Iterationen stellt man 1,03 und 0,96 fest) konvergiert und die Iteration für $k = 3$ beschränkt bleibt, sich aber chaotisch verhält. Wird k größer als 3 divergiert die Folge gegen Unendlich.

Hier ist zu beachten, dass in der Realität nicht mehr als 100% erreicht werden können(z.B. bei der Bevölkerung); allerdings ist es für die weitere mathematische Untersuchung notwendig, Werte über 100% zu betrachten.

Werden die Werte für k nun in einem Koordinatensystem auf die x-Achse und die Werte für p_n auf die y-Achse eingetragen, entsteht folgendes Diagramm:

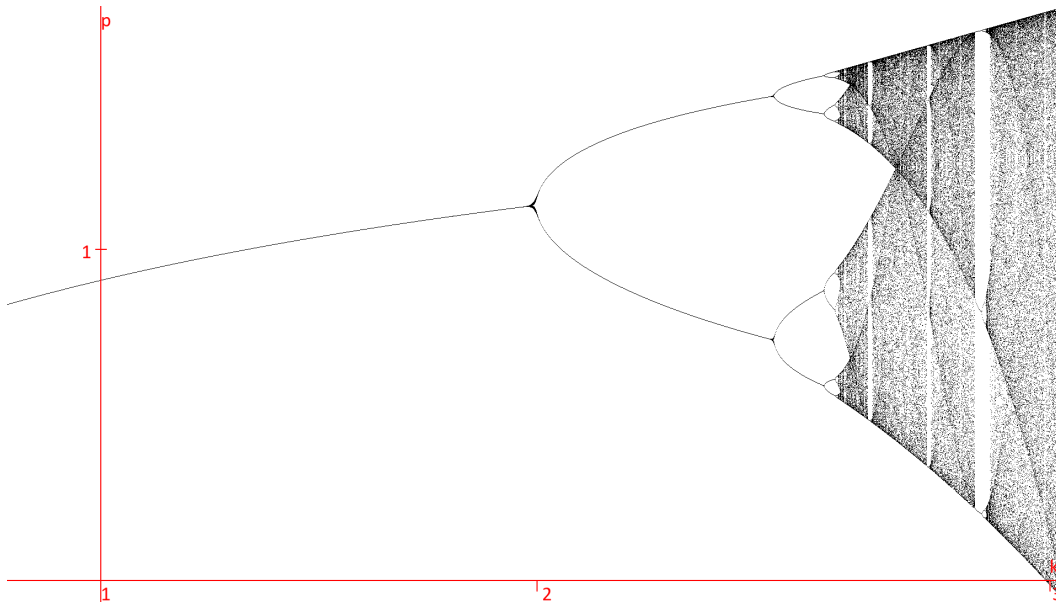


Abbildung 13: Feigenbaum-Diagramm für $p_0 = 0.3$

Dieses Diagramm, das als *Feigenbaum-Diagramm* bezeichnet wird, wurde nach Mitchell Feigenbaum benannt, der durch dieses einen weiteren wichtigen Zusammenhang entdeckte:

Zunächst betrachtet man die sogenannten *Bifurkationspunkte*, beziehungsweise die Punkte der *Periodenverdopplung*, also an dem Punkt, an dem sich das Diagramm in zwei Wege aufspaltet. Der eine ist aus vorherigen Messwerten bekannt, nämlich ungefähr bei $k = 2$. Der nächste ist ungefähr bei $k = 2.45$, der darauffolgende ungefähr bei 3.56 . Sei n nun der Index des jeweiligen Bifurkationspunktes (also $k_1 = 2$, $k_2 = 2.45$, etc.), gilt für das Verhältnis der Abstände der Bifurkationspunkte bei unendlich vielen aufeinanderfolgenden Bifurkationspunkten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n - k_{n-1}}{k_{n+1} - k_n} = 4,669202... = \delta$$

Dieses δ wird als die *Feigenbaum-Konstante* bezeichnet.[3] Sie spielt in der Chaosforschung eine wichtige Rolle; sie ist auch Bestandteil der Untersuchung bestimmter Differentialgleichungen und physikalischen Prozessen. Auch die Mandelbrot-Menge ist damit verbunden:

Betrachtet man alle reellen Werte für c auf der x-Achse und trägt die dabei vorkommenden Attraktoren auf die y-Achse ein, erhält man ein ähnliches Diagramm, mit genau dieser Feigenbaum-Konstante, die sich aus den Abständen der Bifurkationspunkte ergibt.[4]

4 Zusammenfassung

Fraktale sind interessante und wichtige Bestandteile für die Erforschung unserer Welt. Benoît Mandelbrot wollte mit den Fraktalen zeigen, dass die Welt nicht mit einfachen geometrischen Gebilden beschrieben werden kann, wie es Mathematiker vor seiner Zeit lange gemacht haben:

„Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.“ [9]

Schon immer als außenstehender Mathematiker wollte er die Sichtweisen der Mathematiker zu seiner Zeit nicht anerkennen - Er konnte sich jedoch durchsetzen und stellte die Mathematik im späten 20. Jahrhundert auf den Kopf.[10] Fraktale bilden heutzutage die Grundlage für die *Chaostheorie*. Die Chaosforschung beschäftigt sich damit, in dem scheinbaren Chaos eine Ordnung zu finden. Mit unendlich feinen Fraktalen ist man dazu in der Lage.

Fraktale benutzt man heute eben durch ihre besonderen Eigenschaften in der Untersuchung von Bevölkerungswachstum, der Medizin, der Wetterforschung, der Quanten- und Relativitätstheorie, Bewegungen von Molekülen, sogar auf dem Finanzmarkt und noch für vieles mehr.

Nicht nur nützen viele feine geometrische Gebilde der Fraktale der Komprimierung von Bildern oder bestimmten physikalischen Messungen, auch kann man viele Zusammenhänge mit fraktalen Mengen in dynamischen Prozessen und mathematischen Bereichen erkennen, bei denen es zuvor gar nicht denkbar wäre, dass dort eine Verbindung existiere. Ebenfalls bieten die fraktalen Dimensionen die Möglichkeit, sich von der euklidischen Geometrie zu lösen und so besser bestimmte Sachverhalte zu verstehen, ohne auf eine Dimension einer natürlichen Zahl angewiesen zu sein.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass die Fraktale die theoretische Mathematik belebt haben. Mit der Erforschung durch den Computer, der sich zur Zeit der Erforschung von Fraktalen etablierte, können hoch auflösende Bilder erzeugt werden und große Mengen an Messwerten in Sekunden ausgewertet werden. Fraktale können so sichtbar, beziehungsweise „lebendig“ gemacht werden und weisen einen starken ästhetischen Reiz auf, der neben unzähligen Laien auch Naturwissenschaftler anlockte, um diese außergewöhnlich faszinierenden Gebilde zu verstehen.

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

- [1] Emily Allaway. „The Mandelbrot Set and the Farey Tree“. In: (2016). URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_16/2016papers/emily.pdf (besucht am 20.03.2023).
- [2] M.F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2012. ISBN: 9780486488707. URL: <https://books.google.de/books?id=9nwoOLOMhRAC> (besucht am 20.03.2023).
- [3] Karl-Heinz Becker und M Dörfler. „Dynamische Systeme und Fraktale—Computergraphische Systeme mit Pascal, 4“. In: *Auflage, Braunschweig/Wiesbaden* (1992).
- [4] Reinhart Behr. *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*. Klett, 1989.
- [5] Nathan Cohen. „Fractal antennas: part 1“. In: *Communications Quarterly* 9 (1995), S. 7–22.
- [6] Robert L Devaney. „The Mandelbrot set, the Farey tree, and the Fibonacci sequence“. In: *The American Mathematical Monthly* 106.4 (1999), S. 289–302.
- [7] Haru Hamanaka. *Erkenntnis und Bild: Wissenschaftsgeschichte der Lichtenbergischen Figuren um 1800*. Bd. 16. Wallstein Verlag, 2015.
- [8] B.B. Mandelbrot. *Fractals: Form, Chance, and Dimension*. Mathematics Series. W. H. Freeman, 1977. ISBN: 9780716704737. URL: https://books.google.de/books?id=avw%5C_AQAAIAAJ (besucht am 20.03.2023).
- [9] Benoît B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. Bd. 1. WH freeman New York, 1982.
- [10] Benoît B. Mandelbrot und Helmut Reuter. *Schönes Chaos : mein wundersames Leben, The fractalist*. Piper; 2012. ISBN: 9783492052962. URL: <https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIBKAT%3A599259213> (besucht am 20.03.2023).
- [11] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe. *Chaos: Bausteine der Ordnung*. Springer, 1994.
- [12] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe. *Fractals for the classroom: part one introduction to fractals and chaos*. Springer Science & Business Media, 2013.

- [13] Herbert Zeitler und Dusan Pagon. *Fraktale Geometrie - Eine Einführung: Für Studienanfänger, Studierende des Lehramtes, Lehrer und Schüler*. Springer-Verlag, 2013.

5.2 Abbildungsverzeichnis

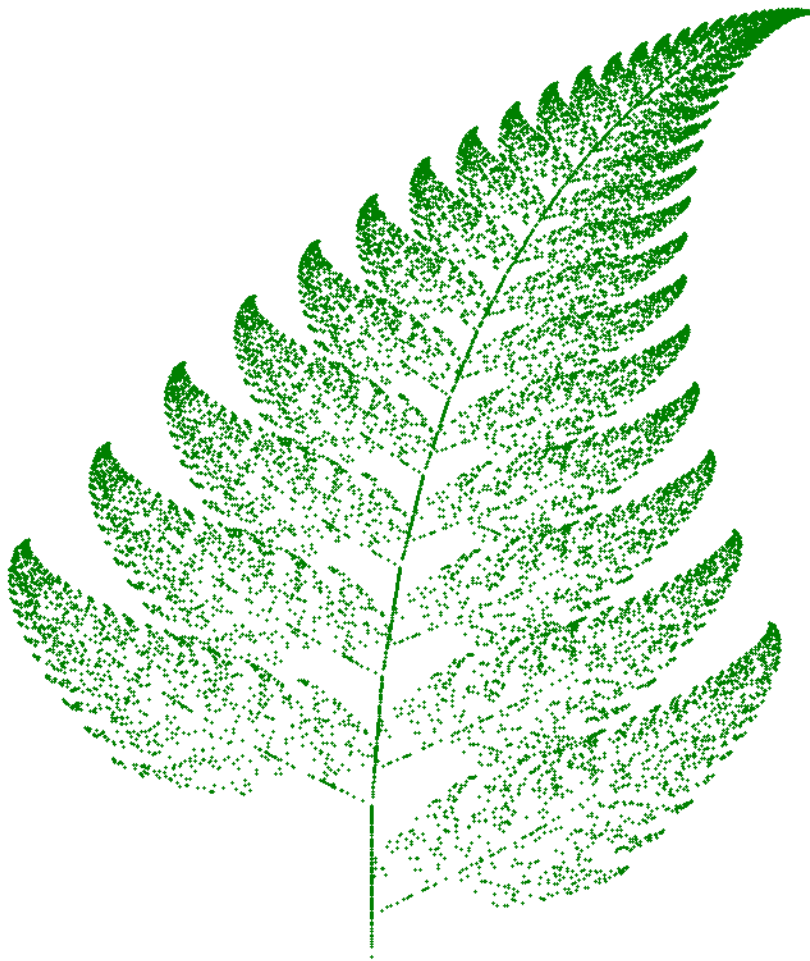
1	Erste Iteration der Koch-Kurve	3
2	Weitere Iterationen der Koch-Kurve	3
3	Die sogenannte <i>Koch-Schneeflocke</i>	4
4	Zerlegung eines Quadrates und Würfels in gleich große Teilstücke im Maßstab 1 : 3	5
5	Die ersten zwei Iterationen vom Menger-Schwamm	6
6	Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt auf der komplexen Zahlenebene	8
7	Grafische Iterationen	9
8	Graphische Darstellung der Mandelbrot-Menge	10
9	Vergrößerung der Mandelbrot-Menge zu $c = -1,5$	11
10	Knospenwerte und Ermittlung der Positionen der Knospen auf der Kardioide	12
11	Julia-Menge für $c = -1$	13
12	Vergleich Mandelbrot-Menge und Julia-Menge mit $c = -0,74543 +$ $0,11301i$ (beide um 90° gedreht)	14
13	Feigenbaum-Diagramm für $p_0 = 0.3$	16

Python™-Code

Alle in der Facharbeit aufgeführten Grafiken wurden selbstständig mit *Python* implementiert. Da es jedoch zu viel Code und zu viele Anmerkungen gibt, um ihn hier aufzulisten, wird er auf der beigelegten Datei zur Verfügung gestellt. Falls Quellen verwendet wurden, sind sie im Code angegeben. Die Wertetabellen wurden ebenfalls selbstständig mit *Python*-Programmen erstellt - der Code dafür wird ebenfalls auf dieser Datei zu finden sein.

Zusätzliche Grafiken

Der sehr realitätsnahe *Barnsley-Farn* (Benannt nach *Michael Barnsley*, vgl. Einleitung) stellt sich als besonders beeindruckendes und deshalb auch als erwähnenswertes Fraktal dar. Dieser Farn wurde durch zufällig generierte Punkte mit bestimmten Vorschriften erstellt. Der Code davon ist ebenfalls in der Datei zu finden.



Der Barnsley-Farn

Veröffentlichungserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit (Bsp.: Schülerbibliothek, IServ) zugänglich gemacht wird.

Leer, den 20. März 2023

Arne Koenen

Vorname Nachname

Versicherung der selbstständigen Erarbeitung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im Wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Leer, den 20. März 2023

Arne Koenen

Vorname Nachname